Реализация алгоритма построения представления группы по машине Тьюринга

Автор: Шамрай Максим Борисович
Научный руководитель: доцент кафедры информатики, к. ф.-м.н. С. В. Григорьев
Рецензент: ведущий инженер ООО "Ланит-Терком"
К. К. Смирнов

JetBrains Research, Programming Languages and Tools Lab
Санкт-Петербургский государственный университет
Системное программирование

Мотивация

- Кроме иерархии Хомского, есть довольно много классов формальных языков, например, конъюнктивные и булевы
- Не у всех есть критерий непредставимости языка в классе ($Conj \subseteq Bool$?)
- В последнее время все чаще прибегают к смежным дисциплинам для исследования языков
- Предлагается построить представление группы по языку, чтобы в дальнейшем можно было применять аппарат теории групп для исследований

Представление группы

Пусть Σ — конечный алфавит,
$\Sigma^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in \Sigma,\ aa^{-1} = a^{-1}a = 1_G\}$, тогда

- Σ^{+} — свободная полугруппа
- Σ^{*} — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^{*}$ — свободная группа

Представление группы

Пусть Σ — конечный алфавит,
$\Sigma^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in \Sigma,\ aa^{-1} = a^{-1}a = 1_G\}$, тогда

- Σ^+ — свободная полугруппа
- Σ^* — свободный моноид
- $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ — свободная группа

$G = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы

- $G = \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle = \{\varepsilon, a, a^2, b, ab, a^2b\} = S_3$
- $G = \langle a \mid a^5 \rangle = Z_5$
- $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Связь формальных языков с теорией групп

- Представления групп описывают языки, которые могут быть заданы следующим выражением:
  $L(G) = \{\omega = 1_G \mid \omega \in (A \cup A^{-1})^*\}$
- Построение представления группы по машине Тьюринга, которая распознает некоторый язык, было описано в статье[1]

Теорема 1

Пусть $L \subseteq \Sigma^+$ язык, принимаемый машиной Тьюринга M, тогда существует конечно представленная группа $G(M) = \langle A \mid R \rangle$ и инъективное отображение $K : \Sigma^+ \to (A \cup A^{-1})^+$ такое что:
$u \in L \iff K(u) = 1_G$

[1] Mark V. Sapir, Jean-Camille Birget and Eliyahu Rips "Isoperimetric and Isodiametric Functions of Groups" (2002)

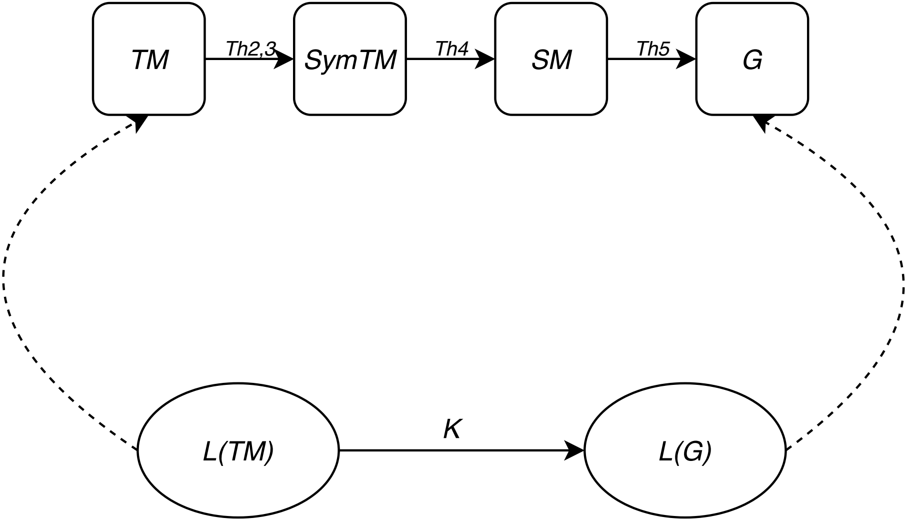
Постановка задачи

Цель: Предоставить исследователям возможность ставить вычислительные эксперименты по преобразованию формального языка в соответствующее представление группы

Задачи:

1. Реализовать алгоритм преобразования контекстно-свободной грамматики в машину Тьюринга
2. Разработать алгоритм построения представления группы по машине Тьюринга
3. Разработать интерпретаторы промежуточных машин для проверки сохранения языка
4. Провести эксперименты

Схема построения представления группы



Нотация машины Тьюринга

Машина Тьюринга имеет k лент и k голов и может быть описана как шестиместный кортеж: $M = \langle X, \Gamma, Q, \Theta, \overline{s_1}, \overline{s_0} \rangle$, где

- X — входной алфавит.
- Γ — алфавит лент.
- $Q = \cup_{i=1}^{k} Q_i$ — множество состояний голов на лентах машины.
- Θ — множество команд машины.
- $\overline{s_1}$ — k-вектор начальных состояний машины.
- $\overline{s_0}$ — k-вектор конечных состояний машины.

Команда одноленточной машины Тьюринга имеет вид:

$$uqv \to u'q'v'$$

где u, v, u', v' — ячейки, q, q' — состояния

Построение распознавателя контекстно-свободной грамматики

- Алгоритм строит магазинный автомат, написанный в терминах машины Тьюринга, по контекстно-свободной грамматике
  - На входе — контекстно-свободная грамматика в нормальной форме Хомского
  - На выходе — машина Тьюринга, где первая лента входная, а вторая эмулирует стек автомата
- Для построения детерминированной машины Тьюринга по детерминированной грамматике при необходимости добавляются команды предпросмотра

Симметризация недетерминированной машины Тьюринга

Теорема 2

Для любой машины Тьюринга M существует недетерминированная машина Тьюринга M' со следующими свойствами:

- M' симметричная
- Распознает тот же язык, что и M
- Каждая команда действует только на одной ленте

- Для сохранения языка добавляется лента, алфавитом которой яляются команды машины Тьюринга
- Получившаяся симметричная машина Тьюринга может иметь много состояний и состоять из многих команд, что говорит о ее сложности
- Но при этом ее можно построить и для детерминированной, и для недетерминированной исходной машины Тьюринга

Симметризация детерминированной машины Тьюринга

Теорема 3

Для любой детерминированной машины Тьюринга M существует эквивалентная симметричная машина Тьюринга, полученная из M добавлениями команд τ^{-1} для каждой команды τ из M.

- Авторы теоремы E. Post и A. A. Markov (1947)
- Получившаяся симметричная машина Тьюринга гораздо легче машины, полученной по предыдущей теореме
- Но ее можно построить только для детерминированной машины Тьюринга

Построение представления группы

S-машина — система переписывания символов на ленте, которая поддерживает обратный алфавит.

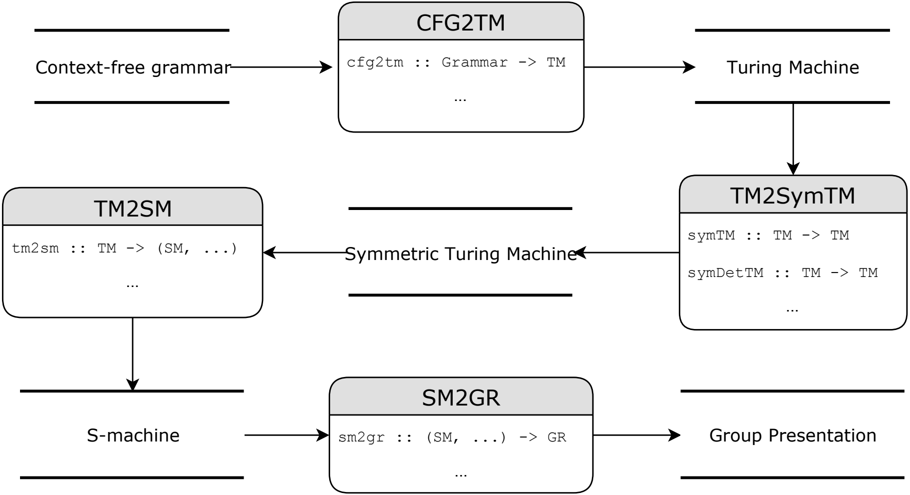
Теорема 4

Для любой машины Тьюринга M' существует S-машина, которая симулирует M'

Теорема 5

Для любой S-машины существует соответствующая конечно-представленная группа

Архитектура решения[2]



[2] https://github.com/YaccConstructor/LangToGroup

Интерпретация

- Необходимо проверять, сохраняется ли язык после каждого шага преобразования
- Так как авторы статьи используют свою эквивалентную нотацию машины Тьюринга, нами были разработаны интерпретаторы и S-машины, и машины Тьюринга
  - Дерево вычислений, корень — стартовая конфигурация
  - Обход дерева в ширину
  - В интерпретаторе S-машины используется множество пройденных конфигураций и построение дерева определенной высоты с выводом в DOT (graph description language)

Эксперименты

Для оценки размера получившегося представления группы, запустили алгоритмы с недетерминированной и детерминированной симметризацией на трех грамматиках:

- one rule: $S \to a$
- a^*: $\begin{aligned} S &\to AS \mid \varepsilon \\ A &\to a \end{aligned}$
- Dyck: $\begin{aligned} S &\to AC \mid \varepsilon \\ C &\to SD \\ D &\to BS \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$

Эксперименты[3]

В таблице приведены мощности множеств

	Grammar			TM			
	Σ	N	R	X	Γ	Q	Θ
1 rule	1	1	1	1	3	6	5
a^*	1	2	3	1	4	8	10
Dyck	2	4	6	2	8	13	21

TM’				SM			G	
X	Γ	Q	Θ	Y	Q	Θ	A	R
1	14	270	206	14	88246	2363	89508	56187
1	26	547	434	26	344118	5741	347370	204903
2	54	1131	900	54	1469136	15064	1478859	957619

[3] Используя алгоритм симметризации недетерминированных машин Тьюринга

Эксперименты[4]

В таблице приведены мощности множеств

	Grammar			TM			
	Σ	N	R	X	Γ	Q	Θ
1 rule	1	1	1	1	3	6	5
a^*	1	2	3	1	4	8	10
Dyck	2	4	6	2	8	13	21

TM'				SM			G	
X	Γ	Q	Θ	Y	Q	Θ	A	R
1	6	39	34	6	6058	501	6410	7637
1	8	73	72	8	15888	1024	16565	17657
2	16	161	158	16	67754	2837	69772	71533

[4] Используя алгоритм симметризации детерминированных машин Тьюринга

Эксперименты

- Размер получившихся представлений групп при симметризации в детерминированном случае гораздо меньше
  - Чем меньше получившееся предсталение группы, тем проще потом сказать о словах в группе, которые равны единице
  - В случае детерминированных грамматик, нужно использовать симметризацию для детерминированных машин
- Проведены эксперименты по интерпретации слов представлений групп
  - Математические пакеты Gap и Maple не справились с задачей проверки слов на равенство групповой единице
  - Актуальным остается вопрос разработки эффективного алгоритма интерпретации слов представлений групп

Результаты

1. Реализован алгоритм преобразования контекстно-свободной грамматики в машину Тьюринга
2. Разработан алгоритм построения представления группы по машине Тьюринга
3. Разработаны интерпретаторы промежуточных машин для проверки сохранения языка в ходе преобразований
4. Проведен ряд экспериментов

Проблема слов

$G = \langle A \mid R \rangle$, $\Sigma = A \cup A^{-1}$
$\phi : \Sigma^* \to G$
$W(G) = \phi^{-1}(1)$

- $W(G)$ – регулярна $\iff$ G – конечна (Anisimov)
- $W(G)$ – контекстно-свободна $\iff$ $\exists H < G$ – свободная подгруппа конечного индекса (Muller–Schupp)