Алгоритмы и программные средства оценки предпочтений на основе парных сравнений при помощи методов тропической математики

Забранский Дмитрий Юрьевич, 661 гр.

Научный руководитель: д.ф.-м.н. проф. Кривулин Н.К.

Рецензент: Смирнов К.К.

Введение

- Оценка предпочтений - одна из задач принятия решений
- Метод парных сравнений - метод сбора исходных данных, который служит основой в представлении результатов измерений предпочтений для метода анализа иерархий
- Метод анализа иерархий - структурированный метод оценки предпочтений в многокритериальных задачах принятия решений
- Тропическая математика - область прикладной математики, связанная с изучением полуколец с идемпотентным сложением

Постановка задачи

В работе были поставлены следующие задачи:

- Изучение МАИ и метода анализа предпочтений на основе парных сравнений
- Изучение элементов тропической математики и их применение к задаче анализа парных сравнений
- Разработка программных средств:
  - Реализация библиотеки тропической арифметики
  - Реализация тропического аналога МАИ
- Анализ результатов применения программных средств

Метод парных сравнений

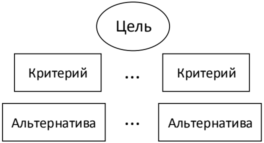
- Набор альтернатив => строим матрицу парных сравнений => ищем оценочный вектор
- Виды шкал сравнений: аддитивная и мультипликативная
- Прямая транзитивность

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1/3 & 1 & 4 \\ 1/12 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Согласованная матрица - матрица парных сравнений, для которой выполняется условие прямой транзитивности
- Решение задачи - собственный вектор
- Итерационные алгоритмы

Метод анализа иерархий

- Три уровня анализа иерархий



- Построение матриц парных сравнений
- Вычисление векторов положительных весов
- Итоговый вектор вычисляется как взвешенная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v^{(i)}$$

- Задача парных сравнений решается много раз

Идемпотентное полуполе

- Алгебраическая система $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$
- Примеры идемпотентных полей:
  - $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел
  - $\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_+, \max, \times, 0, 1)$, где $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел
- $\mathbb{X}^{m \times n}$ — множество всех матриц, которые имеют m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$
- Для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ определена мультипликативно-сопряженная матрица $A^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n \times m}$ с элементами

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ji} \neq \mathbb{0}; \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Алгоритм решения метода парных сравнений

Пусть дана матрица парных сравнений A. Ставится задача найти оценочный вектор матрицы A.

1. Вычисляем тропический спектральный радиус

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(A^m)$$

2. Вычисляем матрицы особого вида

$$A_\lambda = \lambda^{-1} A, \quad A_\lambda^* = I \oplus A_\lambda \oplus \ldots \oplus A_\lambda^{n-1}$$

3. Находим семейство векторов

$$x = A_\lambda^* u, \text{где } u \text{ - произвольный вектор}$$

Алгоритм тропического аналога МАИ

Задача МАИ на языке тропической математики сводится к аппроксимации группы матриц согласованной матрицей с учётом весов.
Пусть дано m альтернатив и n критериев

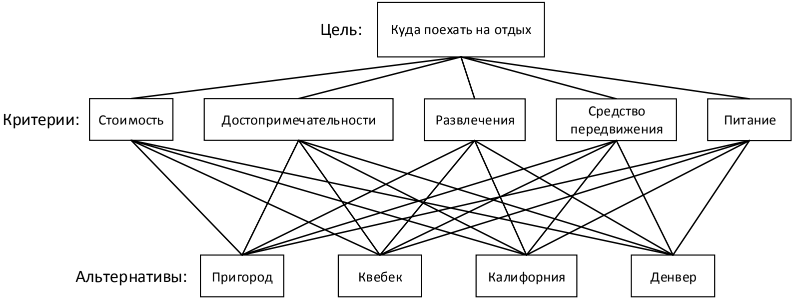
1. Вычисляем вектор весов $(w_1, \dots, w_n)^T$ матрицы сравнения критериев
2. Вычисляем $B = w_1 A_1 \oplus w_1 A_1^- \oplus \dots \oplus w_n A_n \oplus w_n A_n^-$
3. Находим итоговый вектор МАИ (вектор весов матрицы B)

Пункты 1 и 3 используют решение метода парных сравнений.

Особенности реализации

- ЯП C++
- Известные решения:
  - Gfan - software package for computing Gröbner fans and tropical varieties
  - Haskell library (`https://github.com/pharpend/tropical`)
  - Java (Пузиков А.Ю. 2014 г.)

Пример: куда поехать на отдых



Пример: веса критериев

Матрица C представляет собой парные сравнения критериев, собственный вектор c содержит веса критериев:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 5 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0{,}179 \\ 0{,}239 \\ 0{,}431 \\ 0{,}818 \\ 0{,}237 \end{pmatrix}.$$

Пример: матрицы сравнения альтернатив

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 1/3 & 1 & 6 & 7 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/6 & 1/4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1/2 & 1 & 6 \\ 4 & 1/4 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 1/2 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 2 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример: общее решение

Построим матрицу $B = w_1 A_1 \oplus w_1 A_1^- \oplus \ldots \oplus w_5 A_5 \oplus w_5 A_5^-$

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 4{,}681 & 4{,}681 & 2{,}691 \\ 2{,}236 & 1{,}000 & 1{,}794 & 3{,}000 \\ 4{,}000 & 2{,}000 & 1{,}000 & 3{,}000 \\ 3{,}000 & 4{,}681 & 4{,}681 & 1{,}000 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус $\mu = 4{,}327$; общее решение примет следующий вид

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}081 & 1{,}081 & 0{,}750 \\ 1{,}000 & 0{,}750 & 0{,}693 \\ 1{,}000 & 1{,}000 & 0{,}693 \\ 1{,}081 & 1{,}081 & 1{,}000 \end{pmatrix} u, \quad u \in \mathbb{R}_+^n.$$

Пример: ответ

Итоговый вектор весов тропического аналога МАИ

$$x^T = \begin{pmatrix} 0{,}276 & 0{,}191 & 0{,}255 & 0{,}276 \end{pmatrix}$$

$$1 = 4 > 3 > 2$$

Полученный классическим методом итоговый вектор весов

$$w^T = \begin{pmatrix} 0{,}279 & 0{,}226 & 0{,}262 & 0{,}230 \end{pmatrix}$$

$$1 > 3 > 4 > 2$$

Результаты

1. Реализована библиотека тропической арифметики
2. Реализован тропический аналог МАИ
3. Проведен анализ результатов применения методов