Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Кафедра системного программирования

Забранский Дмитрий Юрьевич

Алгоритмы и программные средства оценки предпочтений на основе парных сравнений при помощи методов тропической математики

Магистерская диссертация

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., проф. Терехов А.Н.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. проф. Кривулин Н.К.

Рецензент:
Смирнов К.К.

Санкт-Петербург

2015

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Software Engineering Chair

Dmitriy Zabranskiy

Algorithms and software tools for estimation of preferences based on pairwise comparisons by using methods of tropical mathematics

Master's Thesis

Admitted for defence.
Head of the chair:
professor A. Terekhov

Scientific supervisor:
Dr. Sc., professor N. Krivulin

Reviewer:
K. Smirnov

Saint-Petersburg

2015

Оглавление

Введение

В настоящее время активно развивается теория принятия решений [1], которая использует понятия и методы математики, а её результаты применяются в экономике и менеджменте. Цель теории состоит в изучении закономерности выбора людьми путей решения различного рода задач и способов поиска оптимальных решений из возможных.

Одной из задач принятия решений является оценка предпочтений. На практике применяются различные методы измерения предпочтений, одна из групп этих методов построена на технологии прямых опросов, когда респондент непосредственно оценивает значимость характеристик объектов. Проводить опрос можно двумя путями: попросить упорядочить все объекты относительно друг друга или использовать алгоритм парных сравнений.

Существуют различные методы первого типа опросов, основанные на одновременном соизмерении всех рассматриваемых объектов. Из-за того, что человек, как правило, не может оценить свои предпочтения напрямую, метод парных сравнений выглядит предпочтительнее, его интерпретация приоритета имеет более гибкую форму. Метод парных сравнений был первоначально введён Г. Т. Фехнером [2], а затем развит Л. Л. Терстоуном [3]. Суть метода парных сравнений в том, что респондент каждую характеристику попарно сопоставляет с другими. Сравнения можно осуществлять на основе шкал или на уровне принципиального выбора. Результатом является матрица парных сравнений, которая отражает сопоставление всех характеристик между собой.

Метод парных сравнений служит основой в представлении результатов измерений предпочтений респондентов для метода анализа иерархий (МАИ), который был разработан Томасом Саати в 1970-х годах [4].

МАИ — это структурированный метод оценки предпочтений в многокритериальных задачах принятия решений, который построен на прямом опросе экспертов, стремящихся предельно рационально осуществлять последовательное парное сравнение двух характеристик. В наши дни МАИ применяется для организации и анализа комплексных решений и используется в различных областях, включая финансы, политику, образование, бизнес, промышленность и производственные системы.

Верификация матриц парных сравнений при заполнении порождает новый круг задач: определение соответствия введённых предпочтений, проблема нарушения согласованности (транзитивности) и доопределение частично заданных матриц. Перечисленные задачи возникают в связи с трудностями человеческого восприятия.

Преодолевать проблему несогласованности можно с помощью аппроксимации матриц парных сравнений согласованными матрицами. Аппроксимация производится с помощью использования собственного вектора Перрона-Фробениуса [5] или упрощённых методов Саати. Существует и другой подход, основанный на тропической математике [6].

Тропическая математика позволяет находить итоговый вектор МАИ, рассматривая поиск как задачу минимизации взвешенной суммы относительных ошибок. Для решения данной задачи в [7] предлагают использовать многокритериальную оптимизацию Парето, однако искомый вектор можно выразить непосредственно с помощью тропической математики.

Целью работы является создание библиотеки тропической арифметики для решения задачи анализа парных сравнений, а также разработка метода поиска оптимального итогового вектора МАИ на основе тропической математики.

1 Постановка задачи

Задача настоящей работы включает в себя изучение и применение нового подхода решения задачи анализа предпочтений на основе парных сравнений, а также вычисление результирующего вектора МАИ с помощью тропической математики.

В работе были поставлены следующие задачи:

- Изучение метода анализа предпочтений на основе парных сравнений;
- Изучение МАИ;
- Изучение схемы решения указанных методов;
- Изучение элементов тропической математики;
- Изучение задач тропической оптимизации и аппроксимации и их применение к задаче анализа парных сравнений;
- Разработка программных средств:
  - Реализация библиотеки тропической арифметики;
  - Реализация тропического аналога МАИ;
- Исследование и анализ результатов применения программных средств.

2 Решение задачи анализа парных сравнений

Метод парных сравнений — это метод сбора исходных данных, своеобразного опроса респондентов. На основе полученных данных можно решать различные задачи, включающие в себя построение оценочного вектора.

Метод парных сравнений основан на модели шкалирования Терстоуна [3]. Он представляет собой попарное сравнение альтернатив, которое происходит согласно некоторой принятой шкале сравнений. Шкала сравнений бывает двух видов: аддитивной и мультипликативной. В связи с этим получающиеся матрицы парных сравнений по аддитивной шкале называют аддитивными, по мультипликативной шкале — мультипликативными.

Примером применения метода парных сравнений является опрос общественного мнения, который используется в маркетинге и в социологических исследованиях перед голосованием. Каждый участник опроса сравнивает альтернативы между собой при помощи определённой шкалы.

Матрица парных сравнений отражает предпочтения определённого респондента. В идеальном случае будет выполняться транзитивность отношения предпочтения альтернатив в следующем смысле. Если альтернатива a оказалась более предпочтительной, чем альтернатива b, а альтернатива b предпочтительнее, чем алтернатива c, то, очевидно, альтернатива a должна быть предпочтительнее, чем c. Однако на практике это бывает редко.

Если на примере мультипликативной шкалы альтернатива a предпочтительнее альтернативы b в 3 раза, альтернатива b в 4 раза более предпочтительна, чем c, а степени предпочтения альтернатив a и c соотносятся как 12 к 1, то говорят о прямой транзитивности отношения предпочтения альтернатив. Матрицу парных сравнений, для которой выполняется условие прямой транзитивности, называют согласованной.

В случае мультипликативной шкалы сравнений элементы любой согласованной матрицы $X = (x_{ij})$ определяются соотношением

$$x_{ij} = x_i / x_j,$$

где x_i и x_j - положительные числа для всех i, j. Результат сравнения показывает во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой.

При аддитивной шкале элементы матрицы X задаются соотношением

$$x_{ij} = x_i - x_j,$$

где x_i и x_j - произвольные числа для всех i, j. Результат сравнения показывает на какую величину одна альтернатива предпочтительнее другой.

Целью метода является сопоставление исходным объектам оценочного вектора $(w_1, w_2, \dots, w_n)$, значения которого можно рассматривать как выражение степеней предпочтения этих объектов респондентами.

После составления матрицы парных сравнений вычисляется оценочный вектор w. Существуют различные способы получение этого вектора. Например, через определение собственного вектора матрицы.

Искомый вектор w является собственным вектором матрицы парных сравнений, соответствующим максимальному собственному числу. В начале находим максимальное собственное число $\lambda_{\max}$, а затем решаем векторное уравнение $Aw = \lambda_{\max} w$. Получаемый вектор w в этом случае называют вектором Перрона-Фробениуса [5].

При заполнении матриц парных сравнений возникает проблема несогласованности введённых предпочтений; такого рода противоречие не позволяет корректно работать с числами. Существуют различные способы преодоления проблемы несогласованности. Тропическая математика представляет универсальный подход к решению этой задачи, которая сводится к аппроксимации матрицы парных сравнений согласованной матрицей.

Аппроксимация матриц парных сравнений согласованными матрицами является основным приёмом преобразования результатов парных сравнений для обеспечения согласованности полученных данных.

Задачу аппроксимации в общем виде можно представить следующим образом

$$\min_X \varphi(A, X),$$

где величина φ отражает степень различия между матрицами A и X.

3 Метод анализа иерархий

Метод состоит из трёх уровней анализа иерархий: общая цель находится сверху, критерии на следующем уровне и альтернативы на нижнем. Пример такой структуры иерархии приведён на рис. 1.

Сущность МАИ может быть представлена следующим образом. Мы строим матрицу парных сравнений для сопоставления критериев между собой и отдельно матрицы для сопоставления альтернатив относительно каждого критерия. Рассмотрим одну из таких матриц A; её элемент a_{ij} обозначает рейтинг альтернативы i относительно альтернативы j.

Затем вычисляется вектор положительных весов v для каждой матрицы парных сравнений, где v_i обозначает вес альтернативы i. Идеальный случай, когда $a_{ij} = v_i/v_j$, в этом случае матрица является согласованной.

На практике это происходит редко, поэтому необходимо аппроксимировать матрицу A согласованной матрицей T, где $t_{ij} = w_i/w_j$ для некоторого положительного вектора $w = (w_1 \dots w_n)$. Возникает проблема: как построить матрицу T для данной матрицы A.

Саати предложил использовать в качестве вектора w вектор Перрона-Фробениуса матрицы A. Данный вектор можно вычислить с помощью степенного метода: в процессе многократных приближений при умножении матрицы на вектор получаем значения собственного вектора матрицы и соответствующего ему собственного числа, которое стремится к спектральному радиусу матрицы. Вычисления прекращаются, когда разность между собственными числами двух смежных шагов метода ниже заданной величины.

Как только вектор весов получен для каждого критерия и для сопоставления критериев, они сворачиваются, используя линейную свёртку, в итоговый вектор весов.

Рассмотрим пример из [4]. Перед нами ставится проблема выбора, куда поехать на отдых, среди альтернатив: 1.Пригород, 2.Квебек, 3.Денвер, 4.Калифорния. Предлагается осуществлять выбор исходя из пяти критериев: 1.Стоимость, 2.Достопримечательности, 3.Развлечения, 4.Средство передвижения и 5.Питание.

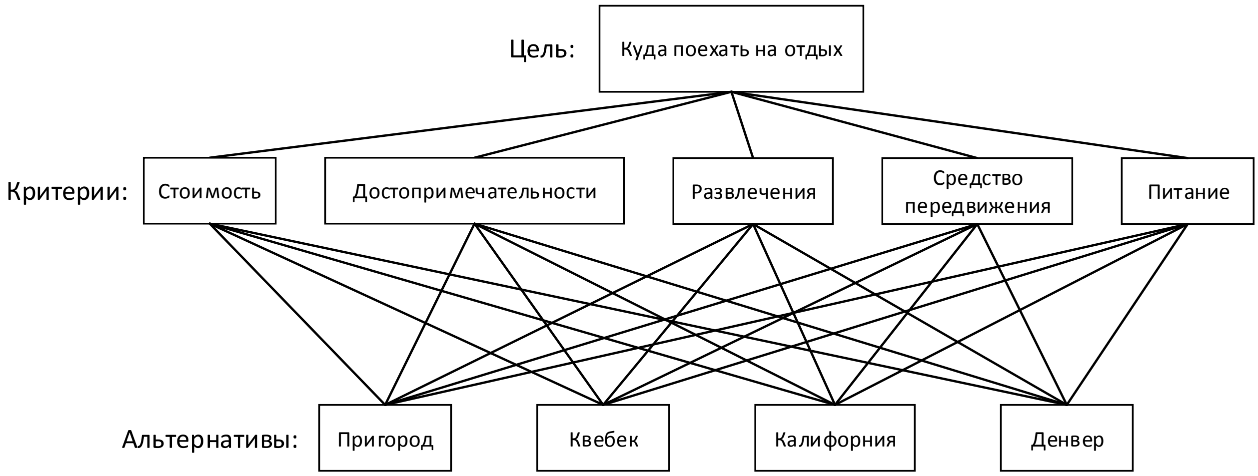

Рис. 1: Структура иерархии МАИ

Матрица C представляет собой парные сравнения критериев, собственный вектор c содержит веса критериев:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 5 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0{,}179 \\ 0{,}239 \\ 0{,}431 \\ 0{,}818 \\ 0{,}237 \end{pmatrix}.$$

Обратно-симметрические матрицы $A_1, \ldots, A_5$ для каждого из 5 критериев и соответствующие им вектора Перрона-Фробениуса $v_1, \ldots, v_5$ представлены далее.

Для критерия стоимости поездки матрица и вектор имеют вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 1/3 & 1 & 6 & 7 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}877 \\ 0{,}460 \\ 0{,}123 \\ 0{,}064 \end{pmatrix}.$$

Для остальных критериев имеем следующие результаты:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/6 & 1/4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1/2 & 1 & 6 \\ 4 & 1/4 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}091 \\ 0{,}748 \\ 0{,}628 \\ 0{,}196 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 1/2 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/7 \\ 2 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}570 \\ 0{,}096 \\ 0{,}096 \\ 0{,}810 \end{pmatrix}.$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(4)} = \begin{pmatrix} 0{,}396 \\ 0{,}355 \\ 0{,}768 \\ 0{,}357 \end{pmatrix}.$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1/7 & 1/6 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(5)} = \begin{pmatrix} 0{,}723 \\ 0{,}642 \\ 0{,}088 \\ 0{,}242 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить итоговый вектор весов, мы вычисляем взвешенную сумму

$$w = \sum_{i=1}^{5} c_i v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0{,}919 & 0{,}745 & 0{,}862 & 0{,}757 \end{pmatrix}^T.$$

4 Модели и методы тропической математики

В этом разделе приводится краткий обзор основных определений, обозначений и результатов тропической математики, использованных в работе, на которые опирается решение задачи анализа парных сравнений и МАИ. Обзор основан на [6, 8, 16, 18], дополнительные материалы по вопросам теории тропической математики представлены в работах [9–12].

4.1 Элементы тропической математики

Пусть $\mathbb{X}$ обозначает непустое множество, которое замкнуто относительно коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, а также включает их нейтральные элементы ноль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Мы предполагаем, что выполняется свойство дистрибутивности умножения относительно сложения и существует обратный по умножению элемент. Кроме того, сложение идемпотентно: $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Алгебраическую систему $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ называют идемпотентным полуполем.

Идемпотентное полуполе будем считать линейно упорядоченным, а также полным, что означает разрешимость уравнения $x^n = a$ при любых $a \in \mathbb{X}$ и натуральном n. Примерами идемпотентных полуполей являются $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$ и $\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_+, \max, \times, 0, 1)$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел.

Полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ является линейно упорядоченным, сложение задано в виде операции определения максимума двух чисел, а умножение — в виде обычного сложения. Нейтральные элементы операций $\mathbb{0} = -\infty$ и $\mathbb{1} = 0$. Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1}, который совпадает с $-x$ в обычной арифметике. Для любых двух чисел x и y степень x^y определена как обычное произведение xy.

В полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$ операции определены как $\oplus = \max$ и $\otimes = \times$, их нейтральные элементы равны соответственно $\mathbb{0} = 0$ и $\mathbb{1} = 1$. Степень и обратный элемент совпадают с аналогичными понятиями обычной арифметики. Это полуполе также линейно упорядочено.

В дальнейшем знак умножения при записи алгебраических выражений для краткости опускается, знак степени используется в смысле операций идемпотентного полуполя.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество всех матриц, которые имеют m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$. Сложение и умножение матриц подходящего размера, а также умножение матрицы на скаляр выполняется по стандартным правилам с заменой обычного сложения двух чисел на операцию $\oplus$ и заменой обычного умножения на операцию $\otimes$.

Квадратная матрица $I \in \mathbb{X}^{n\times n}$, элементы главной диагонали которой равны числу $\mathbb{1}$, а остальные — числу $\mathbb{0}$, называется единичной.

Для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ определена мультипликативно-сопряженная матрица $A^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n\times m}$ с элементами

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ji} \neq \mathbb{0}; \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Целая степень квадратной матрицы A определяется как

$$A^0 = I, \quad A^p = A^{p-1}A, \quad p \geq 1.$$

След матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{tr} A = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Для любых матриц $A, B \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и числа x выполняются равенства

$$\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}A \oplus \mathrm{tr}B, \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \mathrm{tr}(xA) = x\mathrm{tr}A.$$

Обозначим через $\mathbb{X}^n$ множество всех векторов-столбцов размера n с элементами из $\mathbb{X}$. Вектор без нулевых компонент называется регулярным. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, называется нулевым.

Для любого вектора-столбца $x = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определён вектор-строка $x^- = (x_i^-)$ с элементами

$$x_i^- = \begin{cases} x_i^{-1}, & \text{если } x_i \neq \mathbb{0}; \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расстояние между регулярными векторами $x, y \in \mathbb{X}^n$ определено с помощью функции расстояния

$$\rho(x, y) = y^- x \oplus x^- y.$$

В полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ функция ρ совпадает с метрикой Чебышева

$$\rho(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|.$$

Функция ρ для полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ отличается от метрики Чебышева, но приводится к ней после применения логарифма. В общем случае функцию ρ называют квази-чебышевской метрикой.

Расстояние между квадратными матрицами $A, B \in \mathbb{X}^{n\times n}$ без нулевых элементов задаётся квази-чебышевской метрикой

$$\rho(A, B) = \mathrm{tr}(A^- B) \oplus \mathrm{tr}(B^- A).$$

В полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ функция ρ оказывается метрикой Чебышева

$$\rho(A, B) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

В $\mathbb{R}_{\max,\times}$ функция ρ становится метрикой Чебышева после логарифмирования.

Мультипликативная и аддитивная согласованные матрицы на языке тропической математики могут быть представлены в общей форме

$$X = xx^-,$$

где мультипликативная матрица рассматривается в контексте полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$, аддитивная — в контексте $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Таким образом, для любой согласованной матрицы X определён вектор $x = (x_i)$, значения которого ранжируют альтернативы; его нахождение является центральной задачей в анализе парных сравнений.

4.2 Решение задачи тропической оптимизации

Пусть задана квадратная матрица $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$. Рассмотрим равенство

$$Ax = \lambda x.$$

Удовлетворяющие равенству число $\lambda \in \mathbb{X}$ и ненулевой вектор $x \in \mathbb{X}^n$ называют соответственно собственным значением и собственным вектором матрицы A.

Максимальное по величине собственное число любой матрицы A порядка n, называемое спектральным радиусом матрицы, можно вычислить по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^m).$$

Введём обозначения матриц особого вида

$$A_\lambda = \lambda^{-1}A, \quad A_\lambda^* = I \oplus A_\lambda \oplus \ldots \oplus A_\lambda^{n-1}.$$

Рассмотрим задачу

$$\min_x x^{-}Ax, \tag{1}$$

где минимум берётся по всем регулярным векторам $x \in \mathbb{X}^n$.

Полное решение этой задачи получено в работах [15, 16] как следствие решения из более общих задач, а также напрямую в [17].

Теорема 1. *Пусть x — общее регулярное решение задачи* (1), *где матрица A имеет спектральный радиус $\lambda > \mathbb{0}$.*

Тогда минимум в задаче (1) *равен λ, а общее решение имеет вид*

$$x = A_\lambda^* u, \quad u \in \mathbb{X}^n.$$

Решение задачи анализа парных сравнений будет строится на основе применения этого результата.

4.3 Аппроксимация матриц парных сравнений

Пусть задана мультипликативная матрица парных сравнений $A = (a_{ij})$ с положительными элементами, удовлетворяющими соотношению

$$a_{ij} = 1/a_{ji}.$$

Матрица такого вида называется обратно-симметрической.

Рассмотрим задачу аппроксимации матрицы A согласованной матрицей $X = (x_{ij})$ с положительными элементами

$$x_{ij} = x_i/x_j.$$

Согласованная матрица X однозначно определена посредством вектора $x = (x_i)$.

Критерий максимальной относительной ошибки был введён в [13] и вычисляется по формуле

$$\varphi_1(A, X) = \varphi_1(A, x) = \max_{i,j} |(a_{ij} - x_i/x_j)/a_{ij}|.$$

В работах [13, 14] задача минимизации φ_1 сводится к задаче минимизации

$$\varphi_1'(A, X) = \varphi_1'(A, x) = \max_{i,j} a_{ij} x_j / x_i.$$

Таким образом, задачу минимизации относительной ошибки можно свести к нахождению минимума

$$\min_x \varphi_1'(A, x)$$

по всем векторам x с положительными элементами.

Целевая функция φ_1' в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ принимает вид $\varphi(A, x) = x^- A x$. Тогда задача принимает форму (1), общее решение которой даёт теорема 1.

Сформулируем в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ следствие из теоремы 1.

Теорема 2 [8]. *Пусть x — общее регулярное решение задачи* (1)*, где матрица A — обратно симметрическая мультипликативная матрица парных сравнений, которая имеет собственное число λ. Тогда минимум в задаче* (1) *равен λ, а общее решение имеет вид*

$$x = A_\lambda^* u, \quad u \in \mathbb{R}_+^n.$$

Чтобы проверить утверждение теоремы воспользуемся следующими рассуждениями. Рассмотрим критерий точности аппроксимации в виде квазичебышевского расстояния между матрицами, который задаётся следующим образом

$$\varphi(A, X) = \varphi(A, x) = \rho(A, xx^-) = \mathrm{tr}((xx^-)^- A) \oplus \mathrm{tr}(A^- xx^-).$$

В смысле попуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ функция φ совпадает с метрикой Чебышева.

Матрицы A и xx^- обратно симметрические, поэтому выполняется

$$(xx^-)^- = xx^-, \quad A^- = A.$$

Следовательно, критерий можно записать в виде

$$\varphi(A, x) = \operatorname{tr}(xx^- A) \oplus \operatorname{tr}(Axx^-) = \operatorname{tr}(x^- Ax) = x^- Ax.$$

Таким образом, минимизация квази-чебышевского расстояния приводит к задаче (1).

Теорему 2 можно расширить до случая произвольной (не обратно-симметрической) мультипликативной матрицы; такие матрицы могут возникнуть вследствие ошибок при составлении или в результате применения несимметричной процедуры парных сравнений.

Теорема 3 [8]. *Пусть x — общее регулярное решение задачи (1), где матрица A — произвольная мультипликативная матрица парных сравнений, $B = A^- \oplus A$ — матрица с собственным числом μ и $B_\mu = \mu^{-1}B$.*

Тогда минимум в задаче (1) равен μ, а общее решение имеет вид

$$x = B_\mu^* u, \quad u \in \mathbb{X}^n.$$

Доказательства этого утверждения основано на следующих рассуждениях. Для аппроксимации воспользуемся критерием на основе квази-чебышевского расстояния. Вычислим

$$\varphi(A, X) = \varphi(A, x) = \operatorname{tr}((xx^-)^- A) \oplus \operatorname{tr}(A^- xx^-).$$

Рассмотрим задачу

$$\min_x \varphi(A, x).$$

Целевую функцию φ можно преобразовать следующим образом

$$\varphi(A, x) = \mathrm{tr}(x^- A x) \oplus \mathrm{tr}(x^- A^- x) = x^- A x \oplus x^- A^- x = x^- (A^- \oplus A) x = x^- B x.$$

Теперь применим результат теоремы 1 и получим в смысле полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ утверждение теоремы 3.

Наряду с мультипликативной шкалой используется аддитивная шкала; при использовании аддитивного способа описания предпочтений задача аппроксимации матриц парных сравнений в терминах тропической математики сводится к задаче тропической оптимизации.

Критерий точности аппроксимации (абсолютная ошибка) аддитивных матриц парных сравнений рассматривается в смысле полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ и совпадает с метрикой Чебышева. Подробное описание результатов, связанных с парными сравнениями, можно найти в статьях [8, 19, 20].

4.4 Редуцирование матриц

Данный раздел основывается на [6]. Вектор $b \in \mathbb{X}^m$ линейно зависит от векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{X}^m$, если его можно представить в виде линейной комбинации

$$b = x_1 a_1 \oplus \ldots \oplus x_n a_n$$

с коэффициентами $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$.

Пусть b - регулярный вектор. При условии, что матрица A без нулевых элементов, определим величину

$$\Delta(A, b) = \left(A \left(b^- A\right)^-\right)^- b.$$

Пусть вектор b линейно зависит от $a_1, \ldots, a_n$. Следовательно, существует разложение $b = x_1 a_1 \oplus \ldots \oplus x_n a_n$. Введём матрицу $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и вектор

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Тогда это разложение можно записать в форме $b = Ax$. Можно получить следующее утверждение: вектор b линейно зависит от векторов $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\Delta(A, b) = \mathbb{1}$.

Две системы ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_l$ называются эквивалентными, если каждый из векторов одной системы линейно зависит от векторов другой системы.

Пусть $A_{(i)} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ - матрица, полученная из A путем вычеркивания i-го столбца. Рассмотрим систему векторов $a_1, \ldots, a_n$, среди которых могут быть линейно зависимые векторы. Для построения эквивалентной линейно независимой системы применим следующую процедуру.

Для всех $i = 1, \ldots, n$ вектор a_i исключается из системы, если $\Delta(\widetilde{A}_{(i)}, a_i) = \mathbb{1}$, где матрица $\widetilde{A}_{(i)}$ составлена из тех столбцов $A_{(i)}$, которые ещё не исключены. После исключения всех таких столбцов получим систему, которая является линейно независимой и эквивалентной системе $a_1, \ldots, a_n$.

Процедура редуцирования применяется к матрице A^*_λ после её нахождения в решении метода парных сравнений. В полученной редуцированной матрице выбирается эмпирическим способом столбец, который будет оценочным вектором матрицы парных сравнений, что описано в следующем разделе.

5 Тропический аналог МАИ

Тропическая математика позволяет, как было показано в обзоре, находить спектральный радиус λ матрицы A и соответствующее ему семейство векторов $x = A^*_\lambda u$, где u - произвольный вектор.

Ставится задача выбрать из этого семейства определённый вектор, который будет использоваться в качестве вектора весов матрицы парных сравнений в МАИ. Предлагается следующий эмпирический подход. Рассматривать последовательно столбцы матрицы парных сравнений или, иными словами, такой вектор u, состоящий из единицы и нолей, чтобы при умножении на матрицу получался её столбец. Среди таких столбцов выбрать минимальный по евклидову расстоянию или чебышевской метрике. Данный столбец будет считаться решением задачи анализа парных сравнений.

Таким образом, для каждой матрицы парных сравнений можно найти соответствующий ей вектор весов. Так как взвешенная сумма, использованная Саати, на языке тропической математики имеет другой смысл, будем использовать следующий критерий нахождения итогового вектора МАИ. Искомый вектор можно рассматривать как наиболее близкий в плане метрики Чебышева группе матриц, учитывая при этом веса критериев. Таким образом, нахождение итогового вектора МАИ представляется в виде задачи аппроксимации нескольких матриц с учётом весов.

Рассмотрим такую аппроксимацию без учёта весов [8]. Пусть заданы n альтернатив и соответствующие им матрицы парных сравнений $A^{(i)}$. На языке тропической математики требуется найти матрицу X, которая аппроксимирует все матрицы одновременно, то есть решить задачу

$$\min_X \max \{\phi(A_1, X), \dots, \phi(A_n, X)\},$$

где ϕ - некоторая подходящая мера ошибки аппроксимации.

Решение задачи аппроксимации для одной матрицы с помощью методов тропической математики нам известно, будем опираться на него при решении задачи с несколькими матрицами. В терминах тропической математики мультипликативные и аддитивные задачи и их решения записываются в общем виде одинаково, поэтому различие между ними делать ниже не будем.

Так как согласованная матрица представима в форме $X = xx^{-}$, где x - некоторый вектор, приходим к общей задаче минимизации относительно x

критерия

$$\Phi(A_1,\ldots,A_n;x)=\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,xx^-)=\bigoplus_{i=1}^{n}\rho(A_i,xx^-)=x^-\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(A_i\oplus A_i^-\right)\right)x,$$

где ρ - функция ошибки в виде метрики Чебышева для аддитивных задач или квази-чебышевской — для мультипликативных.

Сделаем переход к задаче аппроксимации с учётом весов. Пусть задана матрица парных сравнений критериев C. При помощи предложенного способа выбора вектора метода парных сравнений найдем вектор весов $w_1,\ldots,w_n$ матрицы C. Ставится задача найти матрицу X, которая аппроксимирует все матрицы A_i одновременно с учётом весов критериев w_i.

Рассмотрим следующую сумму

$$\bigoplus_{i=1}^{n} w_i\rho(A_i,X)$$

Представим один её элемент следующим образом

$$w_i\rho\left(A_i,X\right)=w_i\rho\left(A_i,xx^-\right)=w_i\left(\operatorname{tr}\left(A_i^-xx^-\right)\oplus\operatorname{tr}\left(\left(xx^-\right)^-A_i\right)\right)=$$

$$w_i\left(\operatorname{tr}\left(x^-A_i^-x\right)\oplus\operatorname{tr}\left(x^-A_ix\right)\right)=w_i\left(x^-A_i^-x\oplus x^-A_ix\right)=w_ix^-\left(A_i\oplus A_i^-\right)x=$$

$$=x^-\left(w_i\left(A_i\oplus A_i^-\right)\right)x.$$

Получаем

$$\bigoplus_{i=1}^{n} w_i\rho(A_i,X)=x^-\left(\bigoplus_{i=1}^{n} w_i\left(A_i\oplus A_i^-\right)\right)x,$$

Пусть

$$\Phi(A_1,\ldots,A_n;w_1,\ldots,w_n;x)=x^-\left(\bigoplus_{i=1}^{n} w_i\left(A_i\oplus A_i^-\right)\right)x,$$

тогда минимизация по x данного критерия аппроксимации примет вид

$$\min_x\Phi(A_1,\ldots,A_n;w_1,\ldots,w_n;x). \tag{2}$$

Применяем теорему 1 и получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть x — общее решение в смысле $\mathbb{R}_{\max,\times}(\mathbb{R}_{\max,+})$ задачи (2), где A_i — мультипликативные (аддитивные) матрицы парных сравнений для всех $i = 1, \dots, n$, w - регулярный n-мерный вектор, $B = w_1 A_1 \oplus w_1 A_1^- \oplus \dots \oplus w_n A_n \oplus w_n A_n^-$ - матрица, которая имеет собственное число μ и $B_\mu = \mu^{-1} B$.*

Тогда минимум в задаче (2) равен μ, а общее решение имеет вид

$$x = B_\mu^* u,$$

где u - произвольный вектор.

6 Особенности реализации

В данном разделе речь пойдёт об аспектах разработки программных средств, в частности об устройстве базовых классов библиотеки и операций тропической арифметики. В качестве языка программирования был выбран C++; использовалась среда разработки Embarcadero C++Builder XE3.

6.1 Базовая часть

Перед использованием классов или методов библиотеки нужно определить идемпотентное полуполе, которое реализовано отдельным классом с настройками типов коммутативных операций $\oplus$ и $\otimes$; нейтральные элементы операций полуполя определяются в соответствии с выбранными типами операций. По умолчанию операции определены как $\oplus = \max$ и $\otimes = \times$, их нейтральные элементы равны соответственно $\mathbb{0} = 0$ и $\mathbb{1} = 1$, таким образом выбрано полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Класс полуполя Semifield задаётся в основном теле программы и используется в дальнейшем при выполнении операций арифметики. Класс TropicDouble реализован как обёртка над типом с плавающей запятой. С помощью перегрузки операторов $+$ и $*$ реализованы операции тропической арифметики $\oplus$ и $\otimes$; операции сравнения двух чисел заданного полуполя $=, >, <$ также сделаны при помощи перегрузки.

Представление матриц реализовано в виде массива объектов TropicDouble и представляет собой класс TropicMatrix. Сложение и умножение матриц сделано при помощи перегрузки операторов $+, *$ соответствующего класса. Объекты TropicMatrix лежат в основе работы метода парных сравнений и МАИ. Чтобы создать матрицу нужно использовать один из заданных конструкторов класса TropicMatrix.

Все введённые тропические операции над матрицами и векторами в разделе «Элементы тропической математики» имеют реализующие их методы в классе TropicMatrix. Например, проверка является ли матрица обратно-симметрической осуществляется при помощи метода TropicMatrix::isSymmetricallyReciprocal, проверка матрицы на прямую транзитивность — при помощи TropicMatrix::isTransitive.

6.2 Реализация методов

Поиск оценочного вектора в анализе парных сравнений для произвольных матриц реализован в виде метода TropicMatrix::generalSolution, который включает вычисление различных метрик расстояния между матрицами.

Метод tropicAHP представляет собой решение тропического аналога МАИ; результатом он выводит итоговый вектор весов. Промежуточные вычисления в методах, как правило, выводятся в качестве дополнительной информации.

Базовые методы тропической математики: взятие следа матрицы осуществляется с помощью TropicMatrix::getTrace, поиск спектрального радиуса матрицы — TropicMatrix::getSpectralRadius, нахождение мультипликативно-сопряженной матрицы — getMultiplicativeConjugateMatrix, степень матрицы — TropicMatrix::pow, поиск звезды Клини(A_λ^*) — TropicMatrix::getKleeneStar.

Метод TropicMatrix::print предназначен для вывода матрицы в консоль. Редуцирование матрицы соответствует методу TropicMatrix::reduce. Имеется два варианта нормализации полученных векторов TropicMatrix::normalize и TropicMatrix::normalize2.

6.3 Известные решения

Среди программных средств, предназначенных для работы с методами тропической математики, можно выделить следующие:

1. Gfan[1] - программное обеспечение для вычисления тропических многообразий и задач из области тропической геометрии.

2. Библиотека на Haskell[2] - представление идемпотентного полуполя с операциями тропического умножения и сложения.

3. Библиотека на Java[3] - фиксированное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ и базовые операции тропической математики.

Реализация библиотеки данной работы в отличии от других предоставляет настройку идемпотентного полуполя. Благодаря перегрузки операторов $+$ и $*$, полученный код компактен, а его использование интуитивно понятно.

[1] `http://home.math.au.dk/jensen/software/gfan/gfan.html`

[2] `https://github.com/pharpend/tropical`

[3] `http://se.math.spbu.ru/SE/diploma/2014/m/Puzikov_Aleksandr_Juryevich-code.zip`

7 Исследование результатов

Рассмотрим в начале несколько показательных примеров работы метода парных сравнений на основе тропической математики.

Первый пример взят из [21].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1/5 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус $\lambda = 1{,}968$, соответствующее ему семейство векторов принимает форму

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}524 \\ 3{,}873 \\ 0{,}393 \\ 1{,}000 \end{pmatrix} u, \quad u \in \mathbb{R}_{+}^{n}.$$

Таким образом, можно выразить единственный нормализованный (сумма компонент вектора равна 1) собственный вектор

$$x^T = \begin{pmatrix} 0{,}224 & 0{,}570 & 0{,}058 & 0{,}147 \end{pmatrix}.$$

Вектор Перрона-Фробениуса нормализованный в том же виде равен

$$p^T = \begin{pmatrix} 0{,}224 & 0{,}550 & 0{,}062 & 0{,}162 \end{pmatrix}.$$

Как видно в данном примере различие в итоговых векторах не так велико; семейство векторов порождается только одним вектором, что на практике случается редко.

Второй пример взят из [22].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 1/8 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1/2 & 1 & 1/2 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1/5 & 1/8 & 1/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус $\lambda = 2$, соответствующее ему семейство векторов принимает форму

$$x = \begin{pmatrix} 0{,}156 & 0{,}250 & 2{,}500 \\ 1{,}000 & 1{,}000 & 7{,}500 \\ 0{,}250 & 1{,}000 & 3{,}750 \\ 0{,}625 & 1{,}000 & 10{,}000 \\ 0{,}062 & 0{,}100 & 1{,}000 \end{pmatrix} u, \quad u \in \mathbb{R}_{+}^{n}.$$

Затем применяется эмпирический способ выбора вектора из семейства, выбирается третий столбец и нормализуется

$$x^T = \begin{pmatrix} 0{,}101 & 0{,}303 & 0{,}151 & 0{,}404 & 0{,}040 \end{pmatrix}.$$

Нормализованный вектор Перрона-Фробениуса принимает форму

$$p^T = \begin{pmatrix} 0{,}081 & 0{,}345 & 0{,}180 & 0{,}354 & 0{,}038 \end{pmatrix}.$$

Оба вектора одинаково ранжируют альтернативы, но разница в x между 2 и 4 альтернативами более существенна в отличии от p. Явным преимуществом метода парных сравнений, основанного на тропической математики, является общее решение (семейство векторов), так как оно обладает большей мощностью, чем просто один вектор.

Вернёмся к примеру из раздела «Метод анализа иерархий» и вычислим итоговый вектор весов в рамках тропического аналога МАИ.

Воспользуемся теоремой 4. Найдём вектор весов матрицы C.

$$w^T = \begin{pmatrix} 0{,}299 & 0{,}447 & 0{,}668 & 1{,}000 & 0{,}268 \end{pmatrix}.$$

Затем построим матрицу $B = w_1 A_1 \oplus w_1 A_1^- \oplus \ldots \oplus w_5 A_5 \oplus w_5 A_5^-$

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 4{,}681 & 4{,}681 & 2{,}691 \\ 2{,}236 & 1{,}000 & 1{,}794 & 3{,}000 \\ 4{,}000 & 2{,}000 & 1{,}000 & 3{,}000 \\ 3{,}000 & 4{,}681 & 4{,}681 & 1{,}000 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус $\mu = 4{,}3272$; общее решение примет следующий вид

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}081 & 1{,}081 & 0{,}750 \\ 1{,}000 & 0{,}750 & 0{,}693 \\ 1{,}000 & 1{,}000 & 0{,}693 \\ 1{,}081 & 1{,}081 & 1{,}000 \end{pmatrix} u, \quad u \in \mathbb{R}_+^n.$$

Затем применяется эмпирический способ выбора вектора из семейства, выбирается второй столбец и нормализуется, таким образом получается итоговый вектор весов тропического МАИ

$$x^T = \begin{pmatrix} 0{,}276 & 0{,}191 & 0{,}255 & 0{,}276 \end{pmatrix}.$$

Полученный Саати итоговый вектор весов

$$w^T = \begin{pmatrix} 0{,}919 & 0{,}745 & 0{,}862 & 0{,}757 \end{pmatrix}.$$

Ранжировка альтернатив у векторов различная, что показывает, что полученная трактовка предпочтений является иным возможным решением.

Заключение

В рамках данной работы был реализован тропический аналог метода анализа иерархий как решение многокритериальной задачи принятия решений. Также были разработаны программные средства решения на основе тропической математики задач анализа предпочтений на основе парных сравнений и метода анализа иерархий. Были выполнены следующие подзадачи:

1. Изучены теоретические основы тропической математики.
2. Изучены методы решения задач оценки предпочтений на основе парных сравнений.
3. Изучен МАИ.
4. Реализована библиотека тропической арифметики.
5. Реализован тропический аналог МАИ.
6. Проведено исследование результатов применения методов.

Список литературы

1. Орлов А.И. Теория принятия решений. Учебное пособие // М. : «Март», 2004. 656 с.

2. Fechner G. T. Elements of psychophysics // Holt, Rinehart and Winston. 1966. Vol 1.

3. Thurstone L. L. A law of comparative judgement, reprint of an original work published in 1927 // Psychol Rev. 1994. P. 266–270.

4. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий // М. : «Радио и связь», 1993.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц // М. : «Наука», 1966. 354 с.

6. Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем // СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. URL: `http://www.google.ru/books?id=PDQP7kIGrhMC`

7. Gursoy B. B., Mason O., Sergeev S. The analytic hierachy process, max algebra and multi-objective optimisation // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438. P. 2911-2928.

8. Кривулин Н. К., Гладких И. В. Методы построения согласованной матрицы результатов парных сравнений на основе тропической математики // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления. Сб. науч. статей / Под ред. Н. К. Кривулина. СПб.: ВВМ, 2013. С. 4-32.‘

9. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении // М. : Физматлит, 1994. 144 с.

10. Golan J. S. Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications // Mathematics and Its Applications. 2003. Vol. 556. P. 256.

11. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems // Princeton Series in Applied Mathematics. 2006. P. 226.

12. Butkovic P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. // Springer Monographs in Mathematics. 2010. P. 272.

13. Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and pairwise comparison matrices // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 385. P. 47-62.

14. Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and pairwise comparison matrices, II // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, no. 4. P. 927-935.

15. Krivulin N. A Constrained Tropical Optimization Problem: Complete Solution and Application Example Tropical and Idempotent Mathematics and Applications // Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 616. P. 163-177.

16. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints, // Optimization, 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107-1129.

17. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211-232.

18. Krivulin N. Tropical Optimization Problems. Advances in Economics and Optimization. Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich // Nova Science Publishers. 2014. P. 195-214.

19. Krivulin N. A tropical optimization approach in the analysis of pairwise comparison matrices, 2015. URL: http://arxiv.org/abs/1503.04003

20. Krivulin N. Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems, 2015. URL: http://arxiv.org/abs/1504.00800

21. A. Farkas, P. Lancaster, P. Rózsa Consistency adjustment for pairwise comparison matrices // Linear Algebra Appl. 2003. Vol. 10. P. 689–700.

22. T. Saaty, L. Vargas Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios // Math. Model. 1984. Vol. 4. P. 309–324.