

# Математическое обеспечение для вычисления оптимальных значений параметров регулятора встроенной системы

Егор Степанов, 545 гр.

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Математико-Механический факультет  
Кафедра Системного Программирования

Научный руководитель — О.Н. Граничин  
Рецензент — А.Т. Вахитов  
05.06.2012

## Динамические системы: применение

- экономические процессы;
- физические/химические/природные процессы;
- описание технологических процессов на производстве.

## Динамические системы: пример

- Задача: определить текущие цены активов  $\theta_t$  при условии, что в каждый момент времени  $t = 1, 2, \dots$ , можно выбирать числа  $\varphi_t^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и приобрести  $\varphi_t^{(i)}$  единиц  $i$ -го актива.  $y_t$  — сумма денежных средств, которую придется потратить в момент времени  $t$ .
- Модель:

$$y_t = \varphi_t^T \theta_t + v_t.$$

- $v_t$  — помехи, независимые от  $\varphi_t$  и  $\theta_t$ .

## Предметная область

- Линейная дискретная динамическая система

$$y_t = G_*(z^{-1})u_t + v_t, \quad t = 1, \dots, N.$$

- Внешний ограниченный шум

$$v_t : \|v_t\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

- Неизвестный (зашумленный) параметр

$$G_*(z^{-1}) = G(\theta_*, z^{-1}) \in G(\theta, z^{-1})$$

## Предметная область

- методика эллипсоидного оценивания (Ф. Швеппе, А.Б. Куржанский, Д. Бертсекас и И. Родес)
- концепция инвариантности (Ф. Бланкини, С. Миани)
- нехрупкость регулятора (М.В. Хлебников)
- уточнение параметров регулятора

## Постановка задачи: построение доверительного множества

- $\{u_t\}, \{y_t\}, t = 1, \dots, N$ .
- Задача: построить доверительную область  $\hat{\Theta}$ , которой с заданной вероятностью принадлежит  $\theta_*$ .
- $\hat{\Theta}$  должна быть построена без каких-либо априорных знаний о помехах.

# Постановка задачи: линейный динамический регулятор по состоянию

## Определение 1.

Эллипсоид с центром в начале координат:

$$\mathcal{E}_y = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T P^{-1} y \leq 1\}$$

## Определение 2.

Эллипсоид  $\mathcal{E}_y$  называется инвариантным (по состоянию) для замкнутой линейной системы, если

$$y_0 \in \mathcal{E}_y \Rightarrow y_t \in \mathcal{E}_y \quad \forall t \geq 0$$

и для любого внешнего шума со свойствами, описанными выше.

$$y_0 \notin \mathcal{E}_y \Rightarrow y_t \rightarrow \mathcal{E}_y.$$

## Постановка задачи: линейный динамический регулятор по состоянию

- Критерий минимальности ограничивающего эллипсоида:

$$f(P) = \text{Tr}P.$$

- Задача оценки степени влияния внешних ограниченных помех на состояние  $y_t$  системы сводится к нахождению минимального по критерию следа ограничивающего эллипсоида.
- Дополнительная задача — построение *нехрупкого регулятора*  $K$

$$u_t = Kx_t$$

- Нехрупкость:  $(K + \delta_K)$  — тоже регулятор ( $\|\delta_K\| \leq \gamma_K$ ).



# Постановка задачи: линейный динамический регулятор по состоянию

- Сведение к задаче полуопределенного программирования (Semidefinite programming)
- Создание уточняющего метода (в симбиозе с построением доверительного множества)

## Сведение к задаче SDP

- Система:

$$x_{t+1} = (a + \delta_a)x_t + bu_t + dv_t.$$

- Находимый *нехрупкий* регулятор:

$$u_t = kx_t.$$

# Сведение к задаче SDP

Основной результат (получен на основе работ М.В. Хлебникова):

## Теорема 1.

Решение  $\hat{r}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{y}$  задачи минимизации  $r \rightarrow \min$  при линейных матричных ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha p & (ap + by) & 0 & p & p \\ (ap + by) & -p + \gamma_a^2 \varepsilon_1 + \gamma_K^2 \varepsilon_2 b^2 & d & 0 & 0 \\ 0 & d & -(1 - \alpha) & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} -r & -p & 0 \\ -p & -p & p \\ 0 & p & -\varepsilon_3 \end{pmatrix} \leq 0,$$

определяет ограничивающий инвариантный эллипсоид с параметром  $r$  и нехрупкий регулятор,  $k = \frac{y}{p}$ .

## Построение доверительного множества

- Основа: процедура, предложенная О.Н. Граничиным
- Общая схема: исключение областей знакодминирующих корреляций (LSCR, Leave-out Sign-Dominant Correlation Regions)
- Уточнение значения параметра регулятора: обновление информации о неопределенности зашумленного параметра.

Структура пакета прикладных программ:

- 1 модуль задания параметров динамической системы;
- 2 модуль генерации помех и пробных возмущений;
- 3 модуль вычисления параметров нехрупкого регулятора системы;
- 4 модуль построения доверительного множества для неизвестного параметра;
- 5 модуль адаптации (уточнение параметров регулятора).

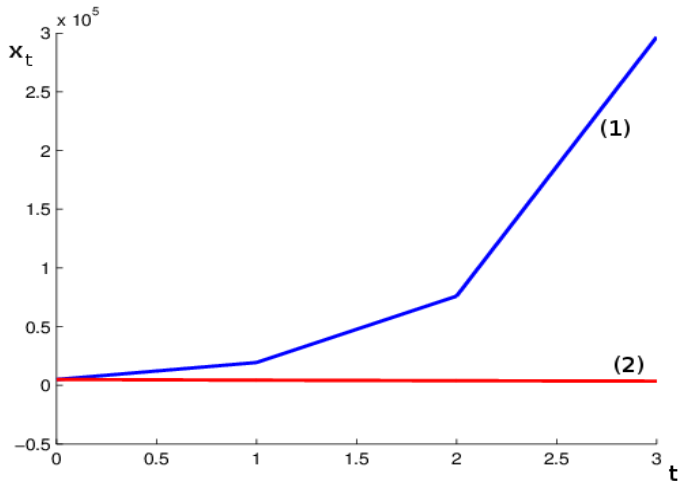
- Модельная задача:

$$x_{t+1} = (3 + \delta_{a_t})x_t - 7.5bu_t + 0.01v_t,$$

- Начальное условие:  $x = -5000$ .
- Использование пакета cvx для решения задачи *SDP*

## Пример

Поведение нестабилизированного (1) и стабилизированного (2) объектов управления:



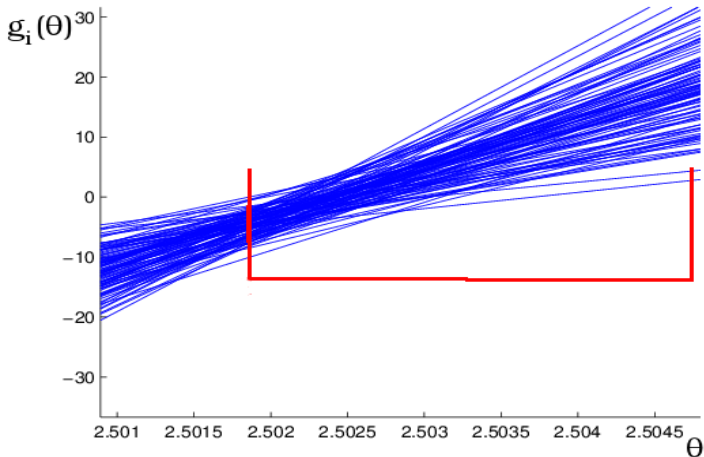
## Пример: нехрупкий регулятор

- Полученное значение параметра регулятора:  $k = 0.4000$ .
- Размер ограничивающего эллипсоида: 1845.1301.



## Пример: доверительное множество

Эмпирические корреляции и доверительное множество  
 $\hat{\Theta} = [2.5018, 2.5046]$ . Заданная вероятность — 98%.



## Пример: результат уточнения

- Уточненное значение параметра регулятора:  $k = 0.3338$ .
- Размер ограничивающего эллипсоида: 757.0680.

# Результаты

- 1 Получен алгоритм для вычисления параметров статического регулятора по состоянию для дискретной линейной системы (на основе работ М.В. Хлебникова).
- 2 Предложен метод для уточнения параметров полученного регулятора на основе построения доверительного множества и техники эллипсоидного оценивания.
- 3 Разработан пакет функций MATLAB для произведения описанных вычислений.
- 4 Разработан модуль на языке C++, реализующий описанные алгоритмы.