Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра системного программирования
Программная инженерия

Дулетов Дмитрий Евгеньевич

О разреженной аппроксимации сигналов при помощи минимальных сплайнов

Курсовая работа

Научный руководитель:
аспирант Куликов Е. К.

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

Введение

Математические модели сигналов, точно описывающие определенные физические процессы, могут быть сложными и малопригодными для использования в прикладных задачах, основанных на математическом моделировании. Кроме того, практическая регистрация сигналов выполняется, как правило, с определенной погрешностью или с определенным уровнем шумов, которые по своим значениям могут быть выше теоретической погрешности прогнозирования сигналов при расчетах по даже очень точным формулам. Поэтому возникает задача аппроксимации — представления произвольных сложных функций простыми и удобными для практического использования таким образом, чтобы отклонение исходной функции от её приближения в области ее задания было наименьшим по определенному критерию приближения.

Один из наиболее известных подходов к построению приближений связан с использованием сплайн-функций. Аппроксимации, основанные на использовании B-сплайнов, являются де-факто стандартом при построении при построении кривых и поверхностей для различных CAGD-систем. Однако используемые базисы не могут точно представить трансцендентные кривые, часто используемые в прикладном проектировании, поэтому активно исследуются различные подходы построения сплайнов, обладающих свойствами B-сплайнов. Среди них отметим так называемые минимальные сплайны, выводимые из системы тождеств, называемой аппроксимационными соотношениями. Они позволяют использовать неполиномиальные базисы, а также строить сплайны на неравномерных сетках [1].

Стандартный метод построения приближения связан с выбором ряда базисных сплайн-функций и представления исходной функции как линейной комбинации базисных с некоторыми коэффициентами, вычисляемыми, как правило в соответствии с некоторой локальной схемой. В последнее десятилетие начинает активно развиваться новое направление – разреженная аппроксимация [2]. Сигнал представляется в виде конечной линейной комбинации элементарных функций, выбранных из некоторого большого, в общем случае линейно зависимого набора функций. В контексте аппроксимации сплайнами такой набор называют сплайновым словарём. Отличие от простой аппроксимации состоит в том, что в разложении участвуют не все функции из набора, а лишь некоторые. При этом выбор наиболее важных функций осуществляется по некоторому, как правило жадному, алгоритму [3]. Разреженная аппроксимация является одним из наиболее динамично развивающихся и перспективных методов представления сигналов, имеющих малую временную протяженность, поскольку не зависит от качества частотно-временного разрешения.

1. Постановка задачи

Целью проводимого исследования является оценка перспективности использования методов разреженной аппроксимации при построении приближений функций, а также уточнение результатов некоторых методов аппроксимации путём использования специальных словарей, состоящих из минимальных сплайнов, построенных на нескольких разбиениях интервала при помощи различных генерирующих функций.

Исследования по применению разреженной аппроксимации в практических приложениях проводились на данный момент лишь самими авторами алгоритмов (см. [3] и бибилиографию в работе) или же специалистами, не занимающимися непосредственно вопросами аппроксимации (см., например [2]), поэтому доверять их результатам безусловно не следует.

Более подробно этапы проводимого исследования можно представить следующим образом:

1. Ознакомление с предметной областью: понятиями B-сплайна, минимального сплайна, их основными свойствами, подходами к решению задачи аппроксимации сплайнами

2. Изучение некоторых известных способов построения сплайновых словарей и алгоритмов разреженной аппроксимации

3. Анализ исходных кодов реализации некоторых алгоритмов разреженной аппроксимации авторами этих алгоритмов, исследование возможности оптимизаций и доработок.

4. Проведение сравнительного анализа некоторых известных алгоритмов разреженной аппроксимации при использовании различных словарей.

5. Исследование возможностей улучшения качества разреженной аппроксимации путём использования словарей, элементами которых

являются значения минимальных сплайнов в некоторых точках.

6. Апробация работы путём выступления с докладами на студенческих конференциях

2. Обзор предметной области

2.1. Разреженная аппроксимация

Разреженная аппроксимация — задача разложения сигнала, одновременно содержащего наименьшее число элементов и минимизирующего ошибку, по избыточному, не являющемуся линейно независимым множеству функций, называемому словарём. Существует два подхода к разреженной аппроксимации — Basis Pursuit и Matching Pursuit (устойчивых эквивалентных терминов на русском языке, к сожалению, автор и его научный руководитель не знают). В данной работе мы рассматривали алгоритмы семейства Matching Pursuit, поскольку они являются более современными и хорошо себя зарекомендовавшими [2].

Один из первых алгоритмов разреженной аппроксимации — MP (Matching Pursuit) был разработан Mallat S. и Zhang Z. в 1993 году [4]. Он представлял из себя итеративный процесс поиска элементов словаря, минимизирующих на каждом шаге ошибку аппроксимации. Позже алгоритм был доработан и опубликован под названием OMP (Orthogonal Matching Pursuit). Главным отличием стала ортоганализация строящегося словаря на каждой итерации алгоритма, что, несмотря на увеличевающееся время вычисления, позволило уменьшить ошибку аппроксимации.

На данный момент алгоритм OMP до сих пор остаётся актуальным и применимым в практических приложениях. На его основе разрабатывается множество потенциально более точных улучшений, таких как, например, OOMP (Optimized Orthogonal Matching Pursuit), BOOMP (Backward-Optimized Orthogonal Matching Pursuit) и многие другие, некоторые из которых представлены на сайте http://www.nonlinear-approx.info/ [5]. Исходные коды алгоритмов написаны на языке MATLAB, также существуют сгенерированные файлы C++, созданные при помощи MATLAB Coder, которые содержат в себе недочёты, а также зависимости от ядра MATLAB.

2.2. Минимальные сплайны

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

В случае необходимости будем считать, что рассматриваемая сетка продолжена за отрезок $[a,b]$ с некоторым фиксированным шагом.

Введем обозначение $J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}, i, k \in \mathbb{Z}, i < k$. Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов.* Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной* цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{0,n-1}$. Обозначим характеристику мелкости сетки через $h_X := \sup\limits_{j \in J_{-2,n-1}} (x_{j+1} - x_j)$.

Введем обозначения для объединения элементарных сеточных интервалов $M := \cup_{j \in J_{0,n-1}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Пусть $S_j := [x_j, x_{j+3}], j \in J_{-2,n-1}$.

Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^2[a,b]$ и ненулевым вронскианом $W(t)$:

$$W(t) := \det(\phi(t), \phi'(t), \phi''(t)) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a,b]. \tag{2}$$

Пусть — полная цепочка векторов. Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M), j \in J_{-2,n-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-2}^{k} {}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv&\ \ \phi(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\, \forall\, k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv&\ \ 0 \qquad \forall\, t \in M \backslash S_j,\, \forall\, j \in J_{-2,n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1}), \forall\, k \in J_{0,n-1}$ соотношения (3) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочка векторов , система (3) имеет единственное решение. По формулам Крамера находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Bigl(\{\,_{j'}\}_{j'\in J_{k-2,k},\,j'\neq j}\ \ \|\ \ {}'^{j}\,\boldsymbol{\varphi}(t)\Bigr)}{\det\Bigl(\,_{k-2},\,_{k-1},\,_{k}\Bigr)} \qquad \forall\, t\in(x_k,x_{k+1}),\ \ \forall\, j\in J_{k-2,k},$$

где символьная запись $\|\ {}'^{j}$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $_j$ на столбец $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Отсюда также следует, что $\operatorname{supp}\omega_j \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных* $(,\boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов*, которое мы будем обозначать через $\mathbb{S}(X, , \boldsymbol{\varphi})$. Тождества (3) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция ϕ называется *порождающей.*

3. Предлагаемая реализация

Выбор языка программирования был во многом предопределён авторами алгоритма, которые реализовали его на языке C++ со вставками MATLAB кода. При работе с этим кодом было решено отказаться от зависимостей с внешними библиотеками, дабы облегчить независимое использование программы на разных платформах. Использование библиотек линейной алгебры требовало бы изменения всей программы, поэтому было целесообразно реализовать недостающие функции непосредственно в коде.

В коде программы был изменен формат входных данных. Вместо передачи в программу данных через аргументы был реализовано чтение из файла, для того, чтобы иметь базу из словарей и было проще между ними переключаться. Функция, генерирующая вывод, принимает на вход тестовый сигнал и соответствующий словарь и выдаёт предсказанный программой сигнал. Также считается разность сигналов — поточечный максимум модуля разности сигналов и тоже выводится. По причинам, описанным выше, была написана функция перемножения матриц.

Был произведён рефакторинг кода, в ходе которого были убраны неиспользуемые функции, например подсчёт размерностей массивов, подающихся на вход, которые теперь передаются в качестве отдельных входных параметров.

Также были исправлены следующие ошибки в коде программы, связанные с тем, что код разрабатывался под платформу x86, используя при этом платформозависимые библиотеки:

- Переполнение типа int при примвоении туда переменных типов ptrdiff_t и size_t.

- В версии для MATLAB программа на выход, кроме сгенерированного словаря, выдаёт также набор коэффициентов и список биортоганальных функций, соответствующих словарю. В версии C++ остаток на каждом шаге алгоритма вычисляется для ортогонализированного словаря, однако коэффициенты считаются при помощи биортогонального, что при неудачно построенном изначальном словаре может вызывать ошибки.

Генерация словарей происходит при помощи программы [6] Куликова Е.К. и Макарова А.А. на языке Maple, разработанной во время их исследований по биортогональной аппроксимации минимальными сплайнами, для которой было написано несколько функций, строящих словарь для определённой сетки и выводящих его в текстовый файл, из которого словарь читает программа построения разреженной аппроксимации.

4. Результаты численных экспериментов

В ходе работы были проведены многочисленные эксперименты по исследованию поведения алгоритма на разных входных данных. Данные варьировались по размеру словаря, шагу сетки, исследуемой функции и, самое главное, генерируемой функции.

В качестве примера рассмотрим функцию $y = arctg(10x)$, значения которой заданы на исходной равномерной сетке с шагом 0.001, а аппроксимация строится на сетке, в десять раз более мелкой, чем исходная. В таблице 1 представлена оценка погрешности — максимум отклонения реального значения и результата приближения в точке. В первом столбце представлены генерирующие вектор-функции, первая из которых порождает полиномиальный B-сплайн. Во втором столбце приведена точность алгоритма разреженной аппроксимации (РА), в котором в качестве элементов словаря были взяты минимальные сплайны, построенные по подмножествам исходной сетки, а в третьем — точность алгоритма биортогональной аппроксимации (БА), в которой в качестве базиса использовались минимальные сплайны, построенные на исходной сетке.

Таблица 1: Ошибка аппроксимации при использовании различных генерирующих вектор-функций

Генерирующая функция	РА	БА
$(1,\, t,\, t^2)$	0.05588	0.06986
$(1,\, sin\, t,\, cos\, t)$	0.05355	0.06838
$(1,\, e^t,\, e^{-t})$	0.05333	0.06638
$(1,\, sh\, t,\, ch\, t)$	0.05333	0.06585

Наиболее точных приближений удалось добиться при использовании гиперболических сплайнов. Отметим, что их свойствам и перспективам применения ранее была посвящена работа [1].

Заметим, что применение методов разреженной аппроксимации позволило получить более точные приближения, чем ранее предложенная биортогональная схема, что указывает на перспективность применения как разреженной аппроксимации как таковой, так и выбора минимальных сплайнов в качестве атомов словарей.

Также отметим, что скорость построения аппроксимации весьма высока: время работы программы не превышает нескольких секунд даже на достаточно мелких сетках.

Заключение

В рамках проведённого исследования были выполнены следующие задачи:

1. Были найдены и исправлены ошибки в коде алгоритма OMP, произведён перенос алгоритма на чистый C++, добавлены возможности ввода и вывода

2. Было проведено сравнение алгоритма OMP с методом биортогональной аппроксимации при использовании различных словарей.

3. Подтверждена гипотеза о возможности улучшения аппроксимации при помощи минимальных сплайнов.

4. Результаты работы были представлены в докладе на конференции "Современные технологии в теории и практике программирования".

Продолжением работы могло бы послужить изучение новейших алгоритмов разреженной аппроксимации, исследование выбора адаптивной сетки для улучшения качества аппроксимации, дальнейшее исследование перспективности использования минимальных сплайнов в качестве атомов словарей для построения разреженной аппроксимации.

Список литературы

[1] Куликов Е. К., Макаров А. А. «Об аппроксимации гиперболическими сплайнами», Зап. научн. сем. ПОМИ, выпуск 472 стр. 179-194, 2018

[2] Луковенкова О. О. «Моделирование и обработка импульсных сигналов геоакустической эмиссии на базе разреженной аппроксимации», диссертация на соискание учёной степени ктн, 2016

[3] Rebollo-Neira L. «A dedicated greedy pursuit algorithm for sparse spectral representation of music sound», Journal of the Acoustical Society of America, vol. 140, no. 4, p. 2933-2943, 2016

[4] Mallat S., Zhang Z. «Matching pursuits with time-frequency dictionaries» // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. 41(12). pp. 3397-3415.

[5] Highly Nonlinear Approximations for Sparse Signal Representation. http://www.nonlinear-approx.info/. Дата обращения 19.12.2019.

[6] Куликов Е. К., Макаров А. А. «Программа для биортогональной аппроксимации данных с параметрами контроля формы», Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2019