Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет

Кафедра системного программирования

Канаева Екатерина

«Определение положения камеры и ее фокусного расстояния по известным размерам объекта и фотографии, сделанной данной камерой»

Курсовая работа

Научный руководитель:
доцент Вахитов А. Т.

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

1. Введение

Задача внешней калибровки камеры - задача определения ориентации и расположения камеры в пространстве по изображению, полученному с ее помощью.

Области применения:
картография, системы распознавания объектов, в расширенной реальности, системы управления компьютером посредством определения положения рук или направления взгляда, системы управления роботами и т.д.

Если неизвестно, какой камерой была сделана фотография, то и внутренние параметры неизвестны. В таких ситуациях возникает задача внешней калибровки камеры с неизвестным фокусным расстоянием.

В зависимости от используемых черт выделяются следующие постановки задачи внешней калибровки: PnP проблема (Perspective n Points problem), PnL проблема (Perspective n Lines problem) и PnA проблема (Perspective n Angles problem).

2. Существующие решения

На сегодняшний день существует несколько алгоритмов решения PnP проблемы с известным фокусным расстоянием. Самый быстрый и точный из которых работает за линейное время от числа 3D точек [1]. Данный алгоритм принимает на вход от четырех точек, однако это не является проблемой, так как для небольшого числа входных точек можно использовать алгоритмы, работающие не за линейное время.

Решений в случае неизвестного фокусного расстояния меньше. Один из алгоритмов использует только четыре входные точки и никак не обобщается на произвольное число точек [2]. Данный подход неточен в случае зашумленных входных данных, так как четырех точек будет недостаточно.
Другим решением является использование алгоритма [1] и перебора фокусного расстояния. Данный способ работает для любого числа точек, однако из-за перебора фокуса он медленный.

3. Постановка задачи

Написать алгоритм, определяющий расположение объекта относительно камеры и фокусное расстояние, зная координаты данного объекта в какой-нибудь системе координат и его проекцию на плоскость камеры.

4. Решение

За основу решения был взят алгоритм, работающий за линейное время от числа входных точек, но использующий фокусное расстояние [1].

Начальные этапы алгоритма для случаев с известным и неизвестным фокусным расстояние одинаковы.

1. Для того, чтобы алгоритм не зависел от числа входных точек, n точек заменяются на 4 контрольные точки. Первая точка выбирается как центр масс всех входных точек, а оставшиеся три строятся так, чтобы они вместе образовывали ортонормированный базис.

Если p_i^w - координаты точек в исходной система координат, а c_j^w - координаты контрольных точек, построенным по ним, то

$$p_i^w = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} c_j^w, \ \sum_{j=1}^{4} a_{ij} = 1$$

Если такое равенство есть для точек в начальное системе координат, то оно сохраняется и для системы координат камеры:

$$p_i^c = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} c_j^c \ (1)$$

Таким образом, достаточно найти координаты относительно камеры только четырех контрольных точек, а потом через них обратно выразить все n точек.

2. Из проективной геометрии известно, как проекции точек выражаются через сами точки:

$$\forall i \ w_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = K p_i^c$$

Здесь
u_i, v_i – координаты проекции i-ой точки,
w_i – параметр масштаба в проективной плоскости,
p_i^c - координаты i-ой точки в системе координат относительно камеры,
K - матрица внутренней калибровки.

Матрица внутренней калибровки зависит от координат принципиальной точки (точка пересечания оптической оси и плоскости изображения) и фокусного расстояния. В случае с известным фокусным расстоянием матрица K считается полностью известной. Для данной задачи координаты принипиальной точки считаются известными, а фокусной расстояние неизвестно, но для упрощения вычислений проекции фокуса на оси абсцисс и ординат считаются равными.

$$K = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u_c \\ 0 & f_v & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь

u_c, v_c – координаты принципиальной точки,

f_u, f_v – проекции фокуса.

Используя то, что все координаты n точек выражаются через четыре контрольные, можно записать равенство:

$$\forall i \; w_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & u_c \\ 0 & f & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \begin{bmatrix} x_j^c \\ y_j^c \\ z_j^c \end{bmatrix},$$

где неизвестными являются $x_j^c, \; y_j^c, \; z_j^c$ - координаты контрольных точек и f - фокусное растояние.

3. После отделения известных параметров от неизвестных получается матричное уравнение:

$$MX = 0, \; (2)$$

где M - матрица размера $(2n \times 12)$,

$X = \begin{bmatrix} fx_1 & fy_1 & z_1 & fx_2 & fy_2 & z_2 & fx_3 & fy_3 & z_3 & fx_4 & fy_4 & z_4 \end{bmatrix}^T$

То есть к координатам точек добавляет еще и неизвестный фокус.

Решение матричного уравнения (2) есть линейная комбинация векторов из ядра матрицы M. Так как для любого линейного оператора

$$dimKerM = dimM - dimrkM,$$

то размерность ядра оператора M может быть 1,2,3,4.

Для нахождения базисных векторов ядра матрицы M используется SVD-разложение:

$$M = UDV^T,$$

где $U, \; V$ - ортогональные матрицы,

D - диагональная, с сингулярными числами на главной диагонали.

При таком разложении последние столбцы матрицы V - базисные векторы ядра M.

Таким образом,

$$X = \sum_{i=1}^{N} \beta_i v_i, \; (3)$$

где v_i - последние столбцы V, которые известны.
Решение уравнения (2) сводится к нахождению неизвестных коэффициентов β_i.

4. Так как искомая система координат получается из начальной преобразованием, состоящим в повороте и сдвиге, то расстояния между точками сохраняются. Исходя из этого имеется 6 соотношений вида:

$$||c_j^c - c_i^c||^2 = ||c_j^w - c_i^w||^2, \ (4)$$

где c_i^c - i-ая контрольная точка в системе координат камеры ,
c_i^w – i-ая контрольная точка в известной системе координат.
После подстановки в равенство (4) представления (3) получается квадратное уравнение относительно коэффициентов β_i и f:

$$(\sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{f} v_k^{i,x} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{f} v_k^{j,x})^2 + (\sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{f} v_k^{i,y} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{f} v_k^{j,y})^2 + (\sum_{k=1}^{N} \beta_k v_k^{i,z} - \sum_{k=1}^{N} \beta_k v_k^{j,z})^2 = ||c_i^w - c_j^w||^2,$$

где $v_k^{i,x}$ - компонента вектора v_k, соответствующая координате x i-ой точки.
Для перехода от системы квадратных уравнений к системе линейных применяется линеаризация. Равенство (4) принимает вид:

$$LB = R \ (5)$$

Здесь
L - известная матрица размера $(6 \times N * N + N)$,
R - столбец расстояний между исходными точками, размера (6×1),
B - столбец размера $(N * N + N \times 1)$, составленный из всевозможных произведений неизвестных коэффициентов β_i с фокусом и без него.

5. Рассматривается разное число базисных векторов из ядра матрицы M, участвующих в линейной комбинации вектора X.
Для N = 1:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1^2}{f^2} & \beta_1^2 \end{bmatrix}^T,$$

а L - матрица размера (6×2), то есть в системе (5) число неизвестных меньше числа уравнений. Из-за существующего шума решение не может быть найдено точно. Для нахождения приблизительного решения используется метод наименьших квадратов, через псевдообратную матрицу.

Для N = 2:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1^2}{f^2} & \frac{\beta_1\beta_2}{f^2} & \frac{\beta_2^2}{f^2} & \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{bmatrix}^T,$$

а L - матрица размера (6×6), то есть в системе (5) число неизвестных равно числу уравнений, и решение находится точно, через обратную матрицу.

Для N = 3:

$$B = \left[\ \tfrac{\beta_1^2}{f^2}, \tfrac{\beta_1\beta_2}{f^2}, \tfrac{\beta_1\beta_3}{f^2}, \tfrac{\beta_2^2}{f^2}, \tfrac{\beta_2\beta_3}{f^2}, \tfrac{\beta_3^2}{f^2}, \beta_1^2, \beta_1\beta_2, \beta_1\beta_3, \beta_2^2, \beta_2\beta_3, \beta_3^2 \ \right]^T,$$

а L - матрица размера (6×12), то есть в системе (5) число неизвестных больше числа уравнений.

К матрице L можно применить SVD-разложение. Система (5) принимает вид:

$$UDV^T B = R$$

$$DV^T B = U^{-1} R$$

Пусть $v = V^T B$. Получается система

$$Dv = U^{-1}B, \ (6)$$

где $D = [diag(\sigma_1, ..., \sigma_6), \mathbf{O}]$.

Таким образом,

$$v_i = \frac{U^{-1}R}{\sigma_i} \ \forall i \in [1; 6],$$

$$v_i - \text{любые} \ \forall i \in [7; 12]$$

$$v = (\frac{U^{-1}R}{\sigma_1}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_2}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_3}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_4}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_5}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_6}, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$$

является решением системы (6).

Пусть $v = (v^0, z)$, где v^0 - известный вектор, z - неизвестная часть

$$V^T B = v,$$

следовательно

$$B = (V^T)^{-1} v = Vv$$

- решение (5). Таким образом решение системы (5) сводится к нахождению неизвестной части вектора v - шести компонент вектора z.

Из того, что столбец неизвестных B получен в результате линеаризации, следуют соотношения:

$$1. \ B_7 B_{10} = B_8 B_8, \text{так как } \beta_1^2 \beta_2^2 = \beta_1\beta_2\beta_1\beta_2$$

$$B_7 B_{12} = B_9 B_9$$

$$B_{10} B_{12} = B_{11} B_{11}$$

$$2. \ B_1 B_{10} = B_4 B_7, \text{так как } \frac{\beta_1^2}{f^2}\beta_2^2 = \frac{\beta_2^2}{f^2}\beta_1^2$$

$$B_1B_{12} = B_6B_7$$

$$B_4B_{12} = B_6B_{10}$$

$$2.1\ B_4B_7 = B_8B_2, \text{так как } \frac{\beta_2^2}{f^2}\beta_1^2 = \beta_1\beta_2\frac{\beta_1\beta_2}{f^2}$$

$$B_6B_7 = B_9B_3$$

$$B_6B_{10} = B_11B_5$$

$$3.\ B_1B_8 = B_2B_7, \text{так как } \frac{\beta_1^2}{f^2}\beta_1\beta_2 = \frac{\beta_1\beta_2}{f^2}\beta_1^2$$

$$B_1B_9 = B_3B_7$$

$$B_4B_8 = B_2B_{10}$$

$$B_4B_{11} = B_5B_{10}$$

$$B_6B_9 = B_3B_{12}$$

$$B_6B_{11} = B_5B_{12}$$

$$4.\ B_1B_{11} = B_5B_7, \text{так как } \frac{\beta_1\beta_1}{f^2}\beta_2\beta_3 = \frac{\beta_2\beta_3}{f^2}\beta_1\beta_1$$

$$B_4B_9 = B_3B_{10}$$

$$B_6B_8 = B_2B_{12}$$

$$4.1\ B_1B_{11} = B_2B_9, \text{так как } \frac{\beta_1\beta_1}{f^2}\beta_2\beta_3 = \frac{\beta_1\beta_2}{f^2}\beta_1\beta_3$$

$$B_4B_9 = B_2B_{11}$$

$$B_6B_8 = B_3B_{11}$$

$$4.2\ B_2B_9 = B_3B_8, \text{так как } \frac{\beta_1\beta_2}{f^2}\beta_1\beta_3 = \frac{\beta_1\beta_3}{f^2}\beta_1\beta_2$$

$$B_2B_{11} = B_5B_8$$

$$B_3B_{11} = B_5B_9$$

$$6.\ B_7B_{11} = B_8B_9, \text{так как } \beta_1^2\beta_2\beta_3 = \beta_2\beta_1\beta_3\beta_1$$

$$B_{10}B_9 = B_8B_{11}$$

$$B_{12}B_8 = B_{11}B_9$$

Общий вид таких соотношений:

$$B_n B_m = B_k B_l \ (7)$$

Относительно вектора v равенство (7) принимает вид:

$$v^T(V_n^T V_m - V_k^T V_l)v = 0,$$

где $V_i - i$-ая строка матрицы V.
Пусть

$$W := V_n^T V_m - V_k^T V_l$$

W - матрица размера (12×12).
В новых обозначениях система (7) принимает вид:

$$v^T W v = 0 \ (8)$$

Для отделения известных компонент вектора v от неизвестных матрица W делится на блоки.

$$v^T W v = \begin{bmatrix} (v^0)^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^1 & W^2 \\ W^3 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^0 \\ z \end{bmatrix} =$$

После поблочного перемножения матриц получается равенство:

$$= (v^0)^T W^1 v^0 + z^T W^3 v^0 + (v^0)^T W^2 z + z^T W^4 z = 0$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$(v^0)^T W^1 v^0 - \text{не зависит от } z$$

$$z^T W^3 v^0 = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{7,1} & \cdots & W_{7,6} \\ \vdots & & \\ W_{12,1} & \cdots & W_{12,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^0 \\ \vdots \\ v_6^0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{6} z_j (\sum_{i=1}^{6} W_{6+j,i} v_i^0)$$

$$(v^0)^T W^2 z = \begin{bmatrix} v_1^0 & \cdots & v_6^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,7} & \cdots & W_{1,12} \\ \vdots & & \\ W_{6,7} & \cdots & W_{6,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_6 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{6} (\sum_{i=1}^{6} v_i^0 W_{i,6+j}) z_j$$

$$z^T W^4 z = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{7,7} & \cdots & W_{7,12} \\ \vdots & & \\ W_{12,7} & \cdots & W_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_6 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{6} (\sum_{i=1}^{6} z_i W_{6+i,6+j}) z_j$$

Таким образом равенство (8) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} W_{6+i,6+j} z_i z_j + \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} (W_{6+j,i} + W_{i,6+j}) v_i^0 z_j + (v^0)^T W^1 v^0 = 0$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестных z_i. После линеаризации равенство (8) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{W}_p Z = C_1,$$

где

$$\mathbf{W}_p =$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} W_{7,7} & W_{7,8} + W_{8,7} \cdots\cdots W_{12,12} & \sum_{i=1}^{6} v_i^0 (W_{i,7} + W_{7,i}) \cdots \sum_{i=1}^{6} v_i^0 (W_{i,12} + W_{12,i}) \end{array} \right]$$

$$Z = \left[\begin{array}{cccccc} z_1^2 & z_1 z_2 & \cdots & z_6^2 & z_1 & \cdots & z_6 \end{array} \right]$$

$$C_1 = -(v^0)^T W^1 v^0$$

Для разных соотношений вида (7) получаются разные матрицы W, по которым строятся строки $\mathbf{W}_p$. Из всех таких строк составляется матрица $\mathbf{W}$, для которой верно

$$\mathbf{W} Z = C, \ (9)$$

где $\mathbf{W}$ - матрица, строки которой различные вектора $\mathbf{W}_p$,
$C = \left[\begin{array}{ccc} C_1 & \cdots & C_{27} \end{array} \right]$,
Z - вектор неизвестных, размера (27×1).
Для того чтобы система (9) была однозначно разрешима требуется 27 соотношений вида (7).
Таким образом, из матричного уравнения (9) однозначно находится вектор Z. Последние шесть компонент вектора Z - $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ - неизвестная часть вектора v. Значит, однозначно находится вектор v, который одназначно определяет вектор B, так как

$$B = Vv$$

Для N = 4:

$$B = \left[\begin{array}{c} \frac{\beta_1^2}{f^2}, \frac{\beta_1\beta_2}{f^2}, \frac{\beta_1\beta_3}{f^2}, \frac{\beta_1\beta_4}{f^2}, \frac{\beta_2^2}{f^2}, \frac{\beta_2\beta_3}{f^2}, \frac{\beta_2\beta_4}{f^2}, \frac{\beta_3^2}{f^2}, \frac{\beta_3\beta_4}{f^2}, \frac{\beta_4^2}{f^2}, \beta_1^2, \beta_1\beta_2, \beta_1\beta_3, \beta_1\beta_4, \beta_2^2, \beta_2\beta_3, \beta_2\beta_4, \beta_3^2, \beta_3\beta_4, \beta_4^2 \end{array} \right]^T,$$

а L - матрица размера (6×20), то есть в системе (5) число неизвестных больше числа уравнений.
Аналогично случаю с N = 3 к матрице L можно применить SVD-разложение. Система (5) принимает вид:

$$UDV^T B = R$$

$$DV^T B = U^{-1} R$$

Пусть $v = V^T B$. Получается система

$$Dv = U^{-1}B,\ (10)$$

Таким образом,

$$v_i = \frac{U^{-1}R}{\sigma_i}\ \forall i \in [1;6],$$

$$v_i - \text{любые}\ \forall i \in [7;20]$$

$$v = (\frac{U^{-1}R}{\sigma_1}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_2}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_3}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_4}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_5}, \frac{U^{-1}R}{\sigma_6}, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14})$$

является решением системы (10).
Пусть $v = (v^0, z)$, где v^0 - известный вектор, z - неизвестная часть

$$V^T B = v,$$

следовательно

$$B = (V^T)^{-1} v = Vv$$

- решение (5). И решение системы (5) сводится к нахождению неизвестной части вектора v - четырнадцати компонент вектора z.
Неизвестные компоненты вектора v находятся с помощью соотношений вида (7).

В обозначениях, принятых ранее, система (7) имеет вид:

$$v^T W v = 0\ (11)$$

Для отделения известных компонент вектора v от неизвестных матрица W делится на блоки.

$$v^T W v = \begin{bmatrix} (v^0)^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^1 & W^2 \\ W^3 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^0 \\ z \end{bmatrix} =$$

После поблочного перемножения матриц получается равенство:

$$= (v^0)^T W^1 v^0 + z^T W^3 v^0 + (v^0)^T W^2 z + z^T W^4 z = 0$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$(v^0)^T W^1 v^0 - \text{не зависит от } z$$

$$z^T W^3 v^0 = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{7,1} & \cdots & W_{7,6} \\ & \vdots & \\ W_{20,1} & \cdots & W_{20,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^0 \\ \vdots \\ v_6^0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{14} z_j (\sum_{i=1}^{6} W_{6+j,i} v_i^0)$$

$$(v^0)^T W^2 z = \left[\begin{array}{ccc} v_1^0 & \cdots & v_6^0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} W_{1,7} & \cdots & W_{1,20} \\ \vdots & & \\ W_{6,7} & \cdots & W_{6,20} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_{14} \end{array} \right] = \sum_{j=1}^{14} (\sum_{i=1}^{6} v_i^0 W_{i,6+j}) z_j$$

$$z^T W^4 z = \left[\begin{array}{ccc} z_1 & \cdots & z_{14} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} W_{7,7} & \cdots & W_{7,20} \\ \vdots & & \\ W_{20,7} & \cdots & W_{20,20} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_{14} \end{array} \right] = \sum_{j=1}^{14} (\sum_{i=1}^{14} z_i W_{6+i,6+j}) z_j$$

Таким образом, равенство (11) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{14} \sum_{i=1}^{14} W_{6+i,6+j} z_i z_j + \sum_{j=1}^{14} \sum_{i=1}^{6} (W_{6+j,i} + W_{i,6+j}) v_i^0 z_j + (v^0)^T W^1 v^0 = 0$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестных z_i. После линеаризации равенство (11) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{W}_p Z = C_1,$$

где

$$\mathbf{W}_p =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} W_{7,7} & W_{7,8} + W_{8,7} \cdots \cdots W_{20,20} & \sum_{i=1}^{6} v_i^0 (W_{i,7} + W_{7,i}) \cdots \sum_{i=1}^{6} v_i^0 (W_{i,20} + W_{20,i}) \end{array} \right]$$

$$Z = \left[\begin{array}{ccccccc} z_1^2 & z_1 z_2 & \cdots & z_{14}^2 & z_1 & \cdots & z_{14} \end{array} \right]$$

$$C_1 = -(v^0)^T W^1 v^0$$

Для разных соотношений вида (7) получаются разные матрицы W, по которым строятся строки $\mathbf{W}_p$. Из всех таких строк составляется матрица $\mathbf{W}$, для которой верно

$$\mathbf{W} Z = C, \ (12)$$

где $\mathbf{W}$ - матрица, строки которой различные вектора $\mathbf{W}_p$,
$C = \left[\begin{array}{ccc} C_1 & \cdots & C_{119} \end{array} \right]$,
Z - вектор неизвестных, размера (119×1).
Для того чтобы система (12) была однозначно разрешима требуется 119 соотношений вида (7).
Таким образом, из матричного уравнения (12) однозначно находится вектор Z. Последние четырнадцать компонент вектора Z - $[z_1, ..., z_{14}]$ - неизвестная часть вектора v. Значит, однозначно находится вектор v, который одназначно определяет вектор B, так как

$$B = Vv$$

6. Для каждого из возможных N находятся векторы B, которые являются решением системы (5). Обратно, релинеаризацией из каждого вектора B находятся коэффициенты $\beta_1, ..., \beta_N$ и f.
По соотношению (3) коэффициенты β_i однозначно определяют вектор X, который при найденном фокусе f однозначно определяет координаты относительно камеры четырех контрольных точек. По равенству (1) любая искомая точка выражается через четыре контрольных, поэтому, зная их, можно восстановить все n точек в системе координат камеры.

7. Для определения наиболее подходящего N используется оценка отклонения проекции, полученных в результате алгоритма, от исходных данных.

$$\sum_{i=1}^{n}(dist(K[R|t]\begin{bmatrix} p_i^w \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}))^2 \to min$$

Выбирается N, при котором ошибка будет минимальной.
Здесь $dist(m, n)$ - Евклидова метрика между однородными координатами точки m и точкой n.

5. Результаты

1. Алгоритм реализован для случаев N = 1,2,3.

2. Проведено тестирование на идеальных и зашумленных входных данных.

3. Проведено сравнение с алгоритмом, использующим перебор фокусного расстояния.

Результаты представлены для пяти случайно сгенерированных матриц точек. Число точек может изменяться от 5 до 100. Координаты точек получаются равномерным распределением на интревалах $(-2, 2) \times (-2, 2) \times (4, 8)$. Фокусное расстояние изменяется от 1 до 800.
В качестве оценки результата используются относительные погрешности матрицы вращения (R) и вектора смещения (t).
В качестве шума используется гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Результаты для идеальных входных данных. Слева - алгоритм с неизвестным фокусным расстоянием, справа - алгоритм, перебирающий фокусное расстояние.

			Перебор фокуса		
R (%)	t (%)	time (s)	R (%)	t (%)	time (s)
0.0000	0.0000	0.3520	16.0337	31.3716	31.8870
0.0000	0.0000	0.4120	49.5379	88.8933	23.5500
0.0000	0.0000	0.3650	31.7488	46.1878	11.6540
0.0000	0.0000	0.4430	29.4942	14.7541	21.7830
0.0000	0.0000	0.4510	27.9484	29.6162	25.2660

Результаты для защумленных входных. Слева - алгоритм с неизвестным фокусным расстоянием, справа - алгоритм, перебирающий фокусное расстояние.

			Перебор фокуса		
R (%)	t (%)	time (s)	R (%)	t (%)	time (s)
3.2805	0.4752	0.3220	38.4984	17.0079	24.2900
0.5020	0.2730	0.3020	61.6220	29.8757	20.6850
0.0417	0.1094	0.4650	14.5236	4.7447	13.7750
0.5558	0.1383	0.3170	9.8457	4.2736	13.6000
2.0432	2.5932	0.3030	24.3715	21.6652	17.6170

Список литературы

[1] F.Moreno-Noguer, V.Lepetit, P.Fua. Accurate non-iterative O(n) solution to the PnP problem. Computer Vision, 2007. ICCV 2007. IEEE 11th International Conference. Rio de Janeiro, October 2007.
[2] M.Bujnak, Z. Kukelova, T. Pajdla. A general solution to the P4P problem for camera with unknown focal length. CVPR 2008, Anchorage, Alaska, USA, June 2008.