Компьютерное зрение: краткое пособие

Вахитов А.Т.

December 17, 2013

1 Теорема Найквиста - Котельникова

1.1 Теория: основные используемые факты

Пусть задана функция $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ее преобразованием Фурье называется функция

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt.$$

Коэффициент Фурье c_n, $n \in \mathbb{N}$ разложения функции $f(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[x_0; x_0 + P]$ выражается как

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} f(t) e^{-i\frac{2\pi n x}{P}} dx,$$

где $x_0, x_0 + P \in \mathbb{R}$.

Если функция $f(t)$ равна нулю всюду кроме интервала $[x_0; x_0+P]$, то коэффициент Фурье c_n совпадает (с точностью до константы) со значением $F(\xi)$ в точке $\frac{n}{P}$:

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} f(t) e^{-i\frac{2\pi n x}{P}} dx = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\frac{2\pi n x}{P}} dx = \frac{1}{P} F\left(\frac{n}{P}\right).$$

Для $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ свертка определяется как $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) h(t) dt$.

Теорема о свертке. Преобразование Фурье от свертки равно произведению преобразований Фурье от h и f :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Функция $f(t)$ выражается через ее преобразование Фурье $F(\xi)$ как

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi.$$

Если функция f имеет ограниченный спектр, то есть $F(\xi) = 0$ при $|\xi| > \lambda$, и $\lambda < \infty$, то

$$f(t) = \int_{-\lambda}^{+\lambda} F(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi.$$

Обозначим как f_s функцию Шэннона

$$f_s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}.$$

Для удобства, введем (нормированную) функцию *sinc*:

$$sinc(t) = \frac{\sin \pi t}{t},$$

с ее помощью функция Шэннона выражается как:

$$f_s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) sinc(t-n).$$

Следующая теорема устанавливает критерий равенства $f_s(t) = f(t)$:

Теорема Котельникова-Найквиста-Шэннона. Пусть $F \in L_1(-\lambda, \lambda)$ является преобразованием Фурье функции $f(t)$ с ограниченным спектром, и $\lambda \leq 1/2$. Тогда справедливо равенство

$$f_s(t) = f(t),$$

означающее, что функция $f(t)$ может быть реконструирована по своим значениям в целых точках с помощью интерполирующей функции *sinc*. Если же $\lambda > 1/2$, то

$$|f(t) - f_s(t)| \leq 2 \int_{|\xi| > 1/2} |F(\xi)| d\xi.$$

Таким образом, если спектр (то есть частотное представление) функции f ограничено, то есть значение f не меняется "слишком быстро", то она может быть без потерь восстановлена по своим значениям в целых точках.

1.2 Практика: пример

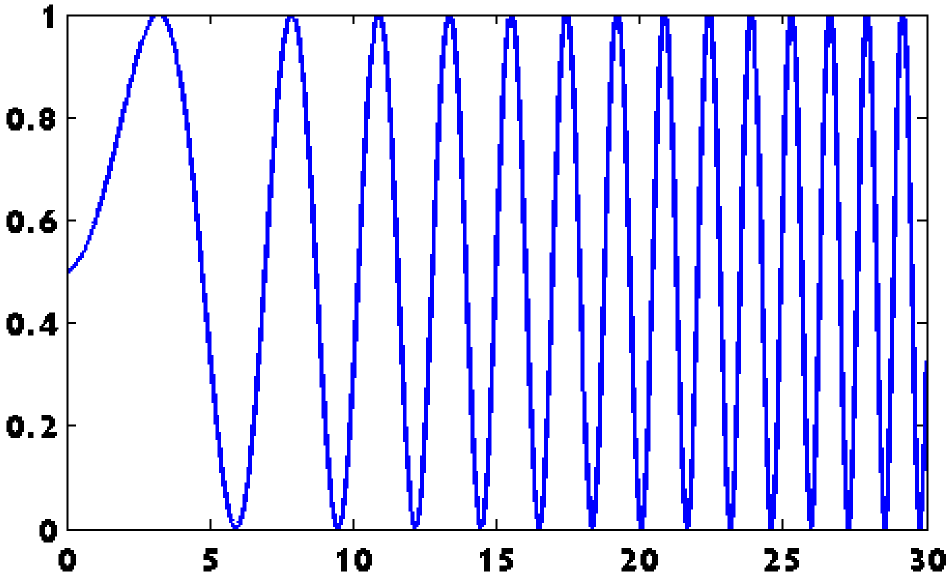
Рассмотрим функцию $f(t): [0:31] \to [0,1]$

$$f(t) = sin((\frac{t}{2,5})^{1,7}) + 1.$$

Ее график приведен на рис. 1.

Пусть наша функция представляет собой освещенность матрицы цифровой камеры вдоль участка ее строки длиной в 30 пикселей. Пусть центр пикселя находится в точках 1...30, и каждый пиксель покрывает область шириной 1, так что первый пиксель, к примеру, занимает площадь $[0,5; 1,5]$. Тогда аргумент функции f имеет смысл расстояния от левого края матрицы до конкретной точки в пикселях. Так,

Figure 1: Функция $f(t)$



освещенность в центре 5-го пикселя будет равна $f(5)$. Пусть нам необходимо построить изображение в градациях серого (т.е. освещенности, иными словами яркости) с использованием этой строки пикселей. Шаг дискретизации, таким образом, будет равен 1 пикселю.

Проблема заключается в том, что, как видно из графика $f(t)$, чередование яркости для достаточно больших t из нашего промежутка происходит более часто, чем шаг пиксельной сетки. Иными словами, частота дискретизации недостаточна для того, чтобы отобразить нашу функцию в пиксельную строку без артефактов.

Если мы ничего о функции $f(t)$ не знаем (предполагая только, что $f \in L_1$), то теоретически обоснованной является реконструкция по формуле Шэннона, обеспечивающая реконструкцию без потерь при $\lambda \leq 1/2$ (см. пункт 1.1). В случае, если есть какие-то дополнительные сведения, сужающие класс допустимых функций $f(t)$, то может быть использована и другая схема реконструкции, но в данном случае мы эту ситуацию не рассматриваем.

Преобразование Фурье функции $f(t)$ на промежутке $[0, 31]$ выражается как:

$$F(\xi) = \frac{1}{C} \int_0^{31} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt,$$

где C - нормирующая константа. График модуля спектра $|F(\xi)|$ представлен на рис. 2. Как мы видим, $F(\xi)$ за пределами интервала $(-0,5; 0,5)$ принимает значимо ненулевые значения, что означает невозможность реконструировать без потерь эту функцию по формуле Шэннона (см. теорему в конце предыдущего пункта).

Чтобы проиллюстрировать, что получится, если мы пренебрежем этим фактом и запишем в пиксели значения яркости в центрах пикселей, посмотрите на рис. 5, где во второй строке показан результат такого действия. Видно, что ближе к правому краю полосы, где на истинной функции яркость начинает меняться существенно чаще, чем шаг пиксельной сетки, появляются визуально различимые артефакты дискретизации, то есть изображение заметно изменяется по сравнению с оригиналом, появляется какой-то узор, которого не было на исходной картине яркости на матрице. Такое изображение может быть неверно визуально интерпретировано. Поэтому появление артефактов нежелательно.

Для того, чтобы справиться с проблемой появления артефактов дискретизации, вместо записи значений функции $f(t)$ в центрах пикселей, первоначально выполним свертку этой функции со сглаживающим ядром, а затем уже вычислим значения получившейся функции в тех же точках. Доопределим за пределами отрезка $[0;31]$ функцию $f(t)$ нулем. Обозначим функцию ядра как $h(t) : \mathbb{R} \to [0;1]$, тогда свертка $\hat{f}(x)$ будет выглядеть как:

$$\hat{f}(x) = (h * f)(x) = \int f(x-t)h(t)dt.$$

В качестве ядра свертки $h(t)$ выберем гауссовскую функцию с $\sigma = 1,15$, показанную на рис. 3, а спектр ее (т.е. модуль ее преобразования Фурье $H(\xi)$) показан на рис. 4. Из теоремы о свертке ясно, что у $\hat{f}(x)$ спектр будет лежать в пределах $(-0,5;0,5)$. Результат записи значений $\hat{f}(t)$ в центрах пикселей представлен на рис. 5 внизу. Видно, что с ростом частоты смены яркости пикселей артефакты не появляются, а цвет пикселя становится равен средней освещенности соответствующей зоны.

Литература

1. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук : Журнал. — 2006. — № 7. — С. 762-770.

2. M.A. Pinsky. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets. AMS, 2002.

Figure 2: $|F(\xi)|$, модуль спектра функции $f(t)$

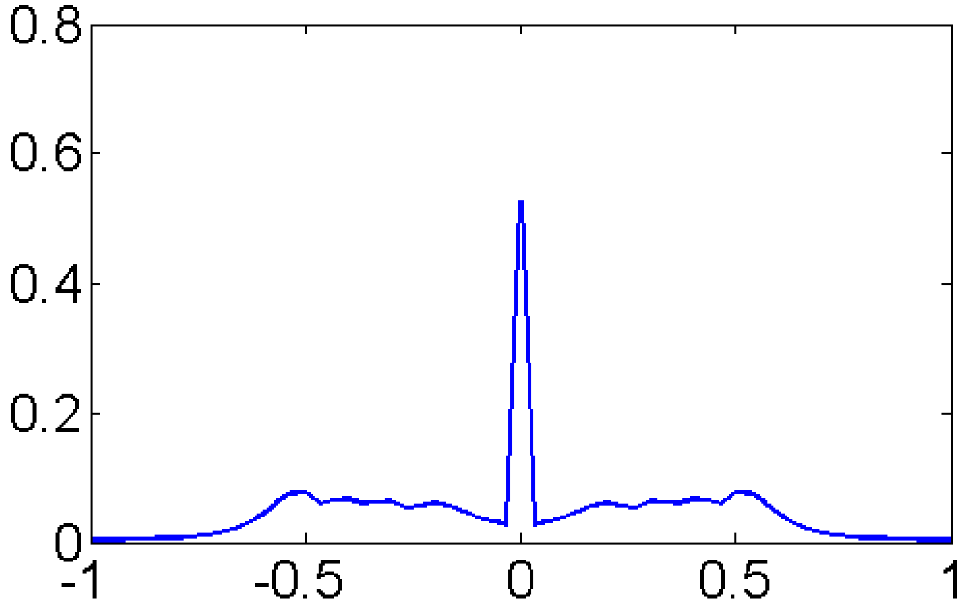


Figure 3: Ядро свертки, $h(t)$

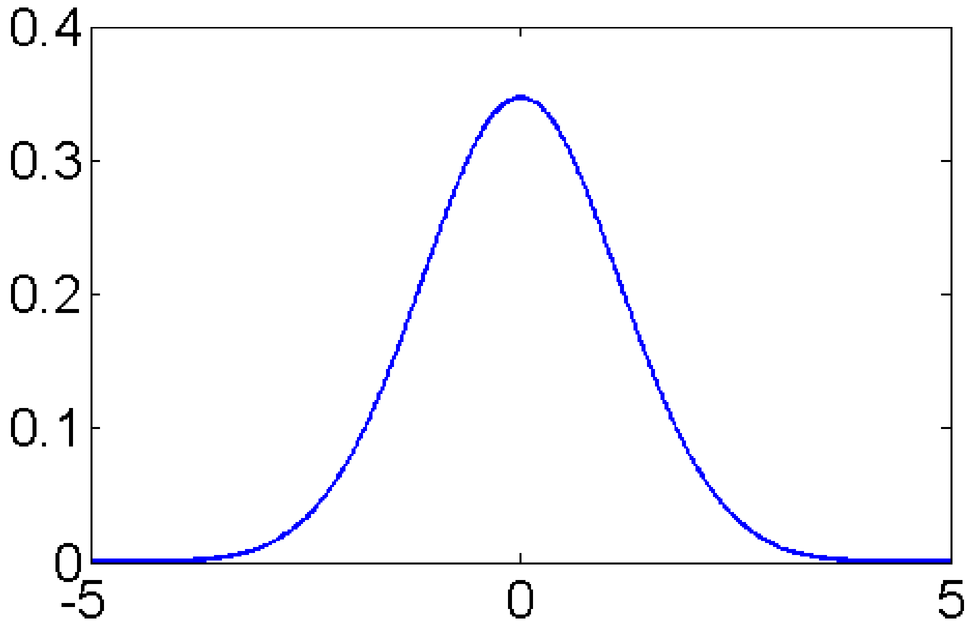


Figure 4: Спектр ядра свертки, $|H(\xi)|$

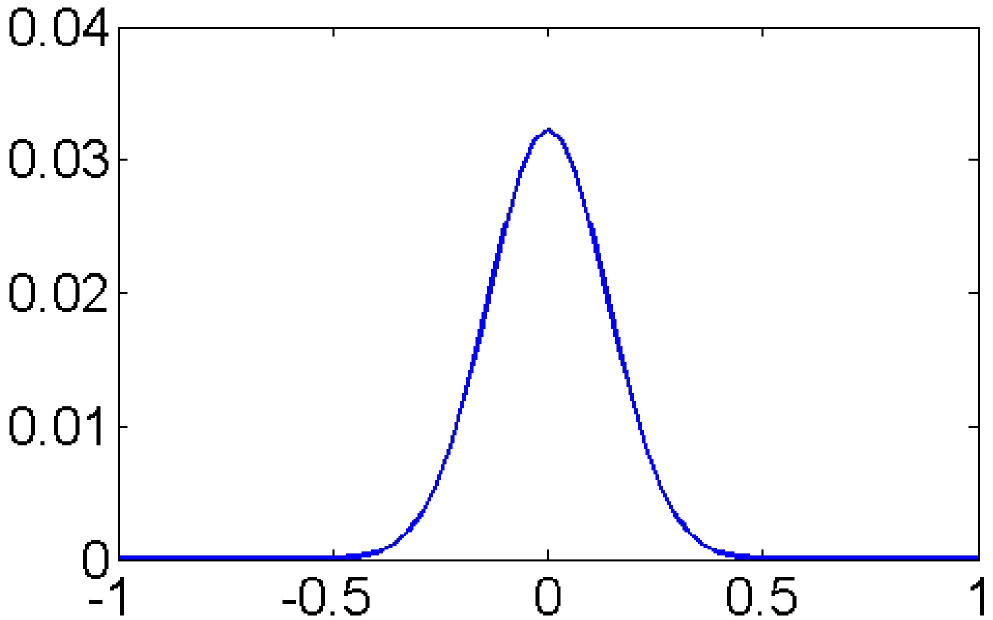


Figure 5: Сверху вниз: Истинная освещенность матрицы, значения пикселей при пренебрежении критерием Найквиста-Котельникова, значения пикселей после свертки с гауссианом