Геометрические вычисления в компьютерном зрении

Who? Александр Вахитов

When? October 24, 2015

План лекции

Проектирование на камеру точек из глобальной системы координат

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ 1 \end{pmatrix} =_h \mathbf{K}[\mathbf{R},\ \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- равенство в однородных координатах
- евклидово преобразование $\mathbf{R}, \mathbf{t}$
- проектирование на камеру $\mathbf{K}$

Основные задачи геометрии в компьютерном зрении

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ 1 \end{pmatrix} =_h \mathbf{K}[\mathbf{R},\ \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- определение положения калиброванной камеры по проекциям точек
- определение положения точки по ее проекциям на камеры (триангуляция)
- калибровка камеры по проекциям точек

Задача определения гомографии

Определение

Гомография **H** - обратимое отображение фактор-множества проективных координат на само себя, такое, что (в однородных координатах) оно представимо как домножение на матрицу.

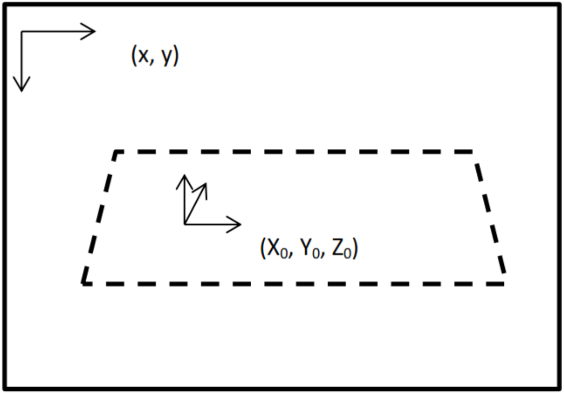
Пример

$$\mathbf{x} = (1,1)^T, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Hx} = ?$$

Упражнение

- Покажите, что гомографией представимо центральное проектирование прямой на плоскости на другую прямую.
- Единственна ли матрица гомографии? Как можно описать матрицы, соответствующие одной гомографии?

Гомография между реальной и изображенной плоскостями



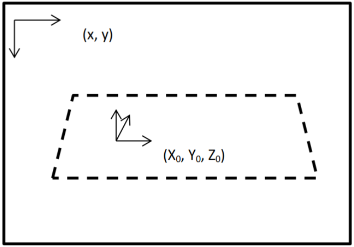
$$\mathbf{x} \equiv K[\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{r}_3\ \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = K[\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Гомография между реальной и изображенной плоскостями

$$\mathbf{x} =_h \mathbf{K}[\mathbf{r_1}\,\mathbf{r_2}\,\mathbf{r_3}\,\mathbf{t}]\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =_h \mathbf{K}[\mathbf{r_1}\,\mathbf{r_2}\,\mathbf{t}]\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим $\mathbf{H} = \mathbf{K}[\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{t}]$. Видим, что гомография связывает однородные координаты в плоскости и в изображении. Если матрица невырожденная, то существует $\mathbf{H}^{-1}$, и $\mathbf{H}$ является гомографией.

Вычисление гомографии

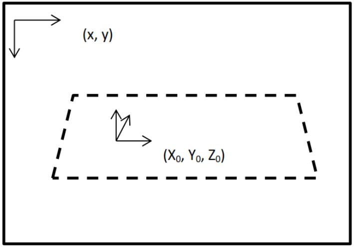


Пусть известны пары векторов однородных координат $(\mathbf{x_{h,i}}, \mathbf{y_{h,i}})_{i=1...N}$, и $\mathbf{x_{h,i}}$ - координаты в плоскости, $\mathbf{y_{h,i}}$ - координаты на экране.
Составим уравнения относительно элементов $\mathbf{H}$ и скаляров λ_i:

$$\lambda_i \mathbf{y_{h,i}} = \mathbf{H}\mathbf{x_{h,i}}.$$

Сколько таких уравнений однозначно задают гомографию?

Вычисление гомографии



Пусть известны пары векторов однородных координат $(\mathbf{x_{h,i}}, \mathbf{y_{h,i}})_{i=1\ldots N}$, и $\mathbf{x_{h,i}}$ - координаты в плоскости, $\mathbf{y_{h,i}}$ - координаты на экране.
Составим уравнения относительно элементов $\mathbf{H}$ и скаляров λ_i:

$$\lambda_i \mathbf{y_{h,i}} = \mathbf{H}\mathbf{x_{h,i}}.$$

Сколько таких уравнений однозначно задают гомографию?

Реальный случай

- Имеет место погрешность в нахождении проекций точек по изображению.
- Как найти гомографию с максимальной точностью?
- Ответом является метод максимального правдоподобия.

Сначала сформулируем в общем виде задачу, затем предложим метод для ее решения.

Общая задача

Имеется

Набор наблюдений - пар
$(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})), \ldots, (\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})).$
Элементы пары связаны отображением f с параметром $\mathbf{p}$ (i - номер пары):

$$\mathbf{y_i} = f(\mathbf{x_i}, \mathbf{p}),$$

Найти

$$\mathbf{p} - ?$$

Укажите, как конкретизируется для:

- поиск гомографии
- определение положения калиброванной камеры по проекциям точек
- определение положения точки по ее проекциям на камеры (триангуляция)
- калибровка камеры по проекциям точек

Общая задача с аддитивной помехой

Имеется

Набор наблюдений - пар $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})), \ldots$. Элементы пары связаны отображением f с параметром $\mathbf{p}$ (i - номер пары), с точностью до шума $\mathbf{v_i}$:

$$\mathbf{y_i} = f(\mathbf{x_i}, \mathbf{p}) + \mathbf{v_i},$$

Найти

$$\mathbf{p} - ?$$

Как вы думаете, что мы можем (должны) знать о $\mathbf{v_i}$, чтобы решить задачу?

Метод максимального правдоподобия ММП

Считаем помеху случайной гауссовской величиной $\mathbf{v_i}$ со средним $\mathbf{e}$ и ковариацией $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$:

$$\mathbf{y_i} = f(\mathbf{x_i}, \mathbf{p}) + \mathbf{v_i}.$$

Оценим вероятность, используя предположение о независимости $\mathbf{v_i}$:

$$P\{p\} = P\{\mathbf{v_1} = \mathbf{y_1} - f(\mathbf{x_1}, \mathbf{p}),$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{y_2} - f(\mathbf{x_2}, \mathbf{p}), \ \ldots \ \mathbf{v_n} = \mathbf{y_n} - f(\mathbf{x_n}, \mathbf{p})\} =$$

$$= \Pi_{i=1}^{n} P\{\mathbf{v_i} = \mathbf{y_i} - f(\mathbf{x_i}, \mathbf{p})\} =$$

$$= \Pi_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v_i}^T \Sigma^{-1} \mathbf{v_i}}.$$

ММП (2)

Назовем оценкой ММП такой $\hat{\mathbf{p}}$, что

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \Pi_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v_i}^T \Sigma^{-1} \mathbf{v_i}}.$$

Как найти максимум? Логарифмированием!

$$\arg\max C(x) = \arg\max \ \ln C(x)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} - \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{y}_i - f(\mathbf{x_i}, \mathbf{p})\|^2 =$$

$$= \arg\max_{\mathbf{p}} -\|\mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \mathbf{p})\|^2,$$

при $\mathbf{X} = col(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x_n})$,
$F = col(f(\mathbf{x_1}, \mathbf{p}), f(\mathbf{x_2}, \mathbf{p}), \ldots, f(\mathbf{x_n}, \mathbf{p}))$,
$\mathbf{Y} = col(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y_n})$.

Метод наименьших квадратов

1. обычный $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{p} + \mathbf{v}$
2. нелинейный $\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}, \mathbf{p}) + \mathbf{v}$

МНК (2)

$$\|\mathbf{Xp} - \mathbf{Y}\|^2 \to \min$$

$$\nabla_{\mathbf{p}} \|\mathbf{Xp} - \mathbf{Y}\|^2 = 0.$$

Пусть $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ обратима, тогда:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}.$$

Что происходит в ином случае?

МНК: Если матрица не обратима

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ не обратима. Изучим SVD разложение для $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} diag(s_1, s_2, \ldots, s_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{U}^T.$$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{U}^T\begin{pmatrix} diag(s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_k^{-1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{U}.$$

Убедитесь, что $\forall \mathbf{x}: \; \mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
Обоснуйте, что я могу использовать как решение

$$\mathbf{p} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^\dagger\mathbf{X}^T\mathbf{Y}.$$

Есть ли еще решения?

Нелинейный МНК

$$\arg\min \|\mathbf{Y} - F(\mathbf{X}, \mathbf{p})\|^2$$

Нет решения в явном виде, можно использовать локальную оптимизацию.

$$C(\mathbf{p}) \to \min$$

Градиентный метод: начнем с $\mathbf{p_0}$,

$$\hat{\mathbf{p}}_n = \hat{\mathbf{p}}_{n-1} - \gamma \nabla C(\mathbf{p_{n-1}}),$$

пока не

- $\|\hat{\mathbf{p}}_n - \hat{\mathbf{p}}_{n-1}\| < \epsilon_1$
- $\|\nabla C(\mathbf{p_n})\| < \epsilon_2$
- $n = N_{stop}$

Сходится для достаточно малого $\gamma > 0$.

Нелинейный МНК (2)

- Градиентный метод - 'медленно, но верно'
- Иначе: Метод Ньютона и его развитие - метод Левенберга-Марквардта (google: levmar)

Метод Ньютона

Разложим $C(\mathbf{p})$ по Тейлору до второго члена:

$$C(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p_0}) + \nabla^T C(\mathbf{p_0})(\mathbf{p} - \mathbf{p_0}) +$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p_0})^T \nabla^2 C(\mathbf{p_0})(\mathbf{p} - \mathbf{p_0}) + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p_0}\|^2).$$

$$\nabla C(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla C(\mathbf{p_0}) + \nabla^2 C(\mathbf{p_0})(\mathbf{p} - \mathbf{p_0}) = 0,$$

и аналогично МНК, для обратимой $\nabla^2 C(\mathbf{p}_0)$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - (\nabla^2 C(\mathbf{p_0}))^{-1} \nabla C(\mathbf{p_0}).$$

Таким образом, метод Ньютона:

$$\hat{\mathbf{p}}_n = \hat{\mathbf{p}}_{n-1} - (\nabla^2 C(\mathbf{p_0}))^{-1} \nabla C(\mathbf{p_{n-1}}),$$

инициализация и останов аналогично градиентному.

Метод Левенберга - Марквардта

Вернемся к нелинейному МНК, опустим зависимость F от $\mathbf{X}$. Приближенно
$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p_0}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p_0}) = \mathbf{F_0} + \mathbf{J}^T\Delta$.

$$\nabla C(\mathbf{p}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{F_0} + \mathbf{J}^T\Delta - \mathbf{Y}) = 0.$$

Отсюда

$$\Delta = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{Y} - \mathbf{F_0}).$$

Для стабильности при необратимой или плохо обусловленной $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$,

$$\Delta = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{Y} - \mathbf{F_0}).$$

Приходим к методу

$$\hat{\mathbf{p}}_n = \hat{\mathbf{p}}_{n-1} - (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{Y} - \mathbf{F_0}),$$

при $\mathbf{J} = \nabla F(\mathbf{p_{n-1}})$, $\mathbf{F_0} = F(\mathbf{p_{n-1}})$.
Для малого λ метод Ньютона, а для большого λ градиентный.

Параметризация вращений

Известный факт: любое вращение есть поворот относительно одной оси на известный угол. Пусть ось $n \in S^2$, угол $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\phi = n\theta$. Для вычисления R по ϕ:

- $\theta = \|\phi\|$, $n = \phi/\|\phi\|$.
- формула Родрига (Rodrigues) (по оси и углу дает матрицу поворота) - cv2.rogrigues в OpenCV

Упражнения

1. Вычислить гомографию из плоскости в экран и развернуть проекцию фасада матмеха
2. Решить с помощью МНК поиск плоскости в 3D

Помехи в наблюдениях пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

1. аддитивные (с добавлением случайных $\mathbf{v_i}$):

$$\{(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}), \ldots\} \mapsto$$

$$\{(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1} + \mathbf{v_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2} + \mathbf{v_2}), \ldots\}$$

2. выбросы:

$$\{(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}), (\mathbf{x_3}, \mathbf{y_3}), \ldots\} \mapsto$$

$$\{(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}), (\mathbf{x_3}, \mathbf{y_3}), \ldots\}$$

3. другие, более сложные

Метод консенсуса случайной выборки (RANSAC)

Выброс (outlier) - наблюдение, не подчиняющееся принятой математической модели
Например:

$$y_i = x + v_i, \quad v \in N(0, 1), \ i = 1 \dots K.$$

Пусть $x = 2$

$$\{y_i\} = \{3.532, 1.23, 2.37, 1.77, 3.11, 72.57, 0.91, 2.03\}$$

Где здесь выброс?

Модель наблюдений с выбросами

Пусть имеется модель построения наблюдений $\mathbf{y}$ по неизвестным параметрам $\mathbf{x}$, так что наблюдения искажаются аддитивной помехой $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}.$$

Может возникнуть случайная ошибка (выброс) в наблюдениях, так что они перестанут подчиняться модели:

$$\{\mathbf{y_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{v_1}), \mathbf{y_2}(\mathbf{x_2}, \mathbf{v_2}), \mathbf{y_3}(\mathbf{x_3}, \mathbf{v_3})\} \mapsto$$

$$\{\mathbf{y_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{v_1}), \mathbf{y_o}, \mathbf{y_3}(\mathbf{x_3}, \mathbf{v_3})\}$$

При этом, вероятность появления $\mathbf{x_o}$, $\mathbf{v_o}$ таких, что $\mathbf{y_o} = f(\mathbf{x_o}) + \mathbf{v_o}$ практически нулевая.

Модель наблюдений с выбросами (2)

Получается, что все наблюдения $\{\mathbf{y_i}\}_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ разбиваются на два класса, то есть $I = I_1 \cup I_2$,

$$\forall i \in I_1 \;\; \mathbf{y_i} = f(\mathbf{x_i}) + \mathbf{v_i}.$$

При этом, для $i \in I_2$ может быть другая модель, может модели вообще не быть.

Фильтрация выбросов методом RANSAC

Задача найти p по наблюдениям x_i, y_i

Алгоритм В цикле по $j = 1 \dots N$

- случайно выбрать M наблюдений $\{(x_{ij}, y_{ij})\}$
- построить гипотезу о значении неизвестного вектора $\hat{p}_j$
- определить множество S_j наблюдений, удовлетворяющих гипотезе $\hat{p}_j$
- $V_j = |S_j|$

Выбрать

$$\hat{p} = \hat{p}_j : \quad j = argmax\ V_j$$

Положение калиброванной камеры по проекциям точек

(π_x, π_y) - функции проектирования

Дано Матрица камеры K, проекции $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)_{i=1}^N$, точки $(X_i, Y_i, Z_i)_{i=1}^N$

Найти V, такое что R, t :

$$\sum_{i \in V} \|\pi_x(X_i, Y_i, Z_i, K, R, t) - \hat{x}_i\|^2 +$$

$$+ \sum_{i \in V} \|\pi_y(X_i, Y_i, Z_i, K, R, t) - \hat{y}_i\|^2 \to \min_{R,t}$$

соответствуют модели проектирования с заданной погрешностью.

Положение камеры по проекциям точек

Пусть известны координаты N точек трехмерного объекта $\{(X_i, Y_i, Z_i)\}_{i=1}^N$ и их проекции на плоскость изображения $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$. Задача нахождения матрицы камеры P по этим данным называется задачей Perspective-n-Point (PnP).

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

- Сколько уравнений?

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

- Сколько уравнений?
- Сколько точек необходимо для однозначного решения?

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

- Сколько уравнений?
- Сколько точек необходимо для однозначного решения?

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \ldots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

- Сколько уравнений?
- Сколько точек необходимо для однозначного решения?
- Какие возможны неоднозначности?

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

- Сколько уравнений?
- Сколько точек необходимо для однозначного решения?
- Какие возможны неоднозначности?

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

- Сколько уравнений?
- Сколько точек необходимо для однозначного решения?
- Какие возможны неоднозначности?
- Если $P = K[R\,t]$, то сколько точек должно хватать?

Положение камеры относительно объекта (2)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots N.$$

Неизвестны: λ_i, P.

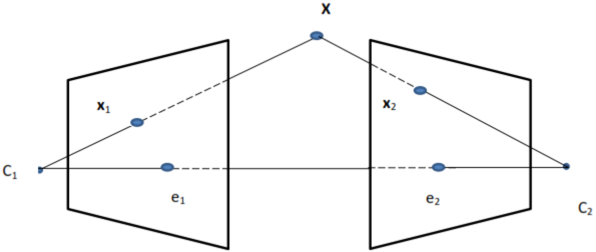
- Сколько уравнений?
- Сколько точек необходимо для однозначного решения?
- Какие возможны неоднозначности?
- Если $P = K[R\,t]$, то сколько точек должно хватать?

Положение калиброванной камеры по проекциям точек: метод

- Домножение на K^{-1}
- Поиск $P = [R\ t] \in M(3,4)$
- Уточнение - поиск $\phi, t : R = R(\phi),\ \phi \in \mathbb{R}^3$

В случае наличия выбросов, первые 2 шага необходимо запускать в цикле по случайным гипотезам

Двухкамерное сопоставление



Система координат задана камерой C_1.

$$\lambda_1 \mathbf{x_2} = K[R\ t] \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \implies e_2 = Kt, \quad \mathbf{x_1} = \lambda_2 \mathbf{X}$$

Проведем прямую через $\mathbf{x_2}, \mathbf{e_2}$:

$$\mathbf{l}(\mathbf{x_2}, \mathbf{e_2}) = \mathbf{x_2} \times \mathbf{e_2} =_h (\mathbf{K}(\mathbf{R}\lambda_3\mathbf{X} + \mathbf{t})) \times \mathbf{Kt} = \lambda_3 \mathbf{KRX} \times \mathbf{Kt} =$$

$$= \mathbf{FX} = \lambda_2 \mathbf{Fx_1} \implies \mathbf{x_2^T F x_1} = 0$$

Двухкамерное сопоставление (2)

Определение Эпиполярная линия (прямая) - прямая, проходящая через проекцию центра одной камеры на другую.

Определение Фундаментальная матрица - матрица, домножение которой на однородные координаты проекции точки на первую камеру дает однородные координаты эпиполярной прямой на второй камере.

$$l(\mathbf{x_2}, \mathbf{e_2}) = F\mathbf{x_1} \implies \mathbf{x_2}^T F\mathbf{x_1} = 0$$

Записав систему уравнений, можно вычислить фундаментальную матрицу
Пусть $\bar{\mathbf{x_1}} = K^{-1}\mathbf{x_1}$, $\bar{\mathbf{x_2}} = K^{-1}\mathbf{x_2}$. Аналогично,

$$l(\bar{\mathbf{x_2}}, \bar{\mathbf{e_2}}) = R\mathbf{X} \times t \equiv [t]_x R\bar{\mathbf{x_1}},$$

Отсюда $E = [t]_x R$ где $[t]_x$ - матрица, домножение на которую дает векторное произведение на t.

Существенная матрица

Определение

Существенная матрица - фундаментальная матрица, заданная для камер, у которых матрица камеры - единичная ($K = I$).

$$SVD(E) = U diag(1,1,0)V^T$$

Пусть

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возможны две факторизации $E = SR$:

$$S = UZU^T,\ R = UWV^T \ \text{ или } \ R = UW^TV^T$$

Какая из факторизаций верна, решаем проверкой того, что получившиеся точки лежат перед камерой

Вычислительные методы для фундаментальной и существенной матрицы

Даны: пары проекций точек на первую и вторую камеру $\{(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{i}, \bar{\mathbf{y}}_\mathbf{i})\}_{i=1}^{N}$
Найти: F (или E)
сколько точек надо?

Вычислительные методы для фундаментальной и существенной матрицы

Даны: пары проекций точек на первую и вторую камеру $\{(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}})\}_{i=1}^{N}$
Найти: F (или E)
сколько точек надо?

- *8-точечный метод* Составляем $Af = 0$, решаем
- *7-точечный метод* По определению, $rank(F) = 2 \implies det(F) = 0$. Следовательно, можно взять 7 точек, тогда $f = \alpha v_7 + (1-\alpha) v_8$, отсюда находим $\alpha : rank(F) = 0$.

Также, можно использовать RANSAC и ММП. При применении RANSAC, 7-точечный метод стабильнее.

Вычислительные методы для фундаментальной и существенной матрицы

Даны: пары проекций точек на первую и вторую камеру $\{(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{i}, \bar{\mathbf{y}}_\mathbf{i})\}_{i=1}^N$
Найти: F (или E)
сколько точек надо?

- *8-точечный метод* Составляем $Af = 0$, решаем
- *7-точечный метод* По определению, $rank(F) = 2 \implies det(F) = 0$. Следовательно, можно взять 7 точек, тогда $f = \alpha v_7 + (1-\alpha)v_8$, отсюда находим $\alpha : rank(F) = 0$.

Также, можно использовать RANSAC и ММП. При применении RANSAC, 7-точечный метод стабильнее.