

Компьютерное зрение '2014

Who? Александр Вахитов

When? January 8, 2015

План лекции

Линейная
модель
динамической
системы

Модель линейной системы

$$x_n = A_n x_{n-1} + w_n$$

- n - момент времени,
- x_n - вектор состояния системы, $x_n \in \mathbb{R}^q$
- $x_0 \in N(0, \Sigma_0)$,
- $w_n \in N(0, \Sigma_w)$ - гауссовский вектор помехи состояния

Пример

Движение точки с координатами (i, j) с постоянной скоростью (v_i, v_j) :

$$q = 4, x_n = (i, j, v_i, v_j)^T, A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Модель наблюдения

$$x_n = A_n x_{n-1} + w_n$$

$$z_n = H_n x_n + v_n,$$

- z_n - вектор наблюдений (измерений), $z_n \in \mathbb{R}^p$
- $v_n \in N(0, \Sigma_v)$ - гауссовский вектор помехи наблюдения

Пример
(продолжение)

$$p = 2, H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Основные понятия

Наблюдаемая система - такая, у которой по наблюдениям можно однозначно восстановить состояния в отсутствие помех в состоянии и наблюдении

Критерий
наблюдаемости

Наблюдаемость эквивалентна $\text{rank} (H, HA, HA^2, \dots, HA^{q-1})^T = q$, где q - размерность состояния.

Фильтр Калмана

Две фазы

- Predict - предсказывает по прошедшим k наблюдениям состояние и наблюдение системы на шаге n . Обозначим результат как $x_{n|k}$
- Correct - корректирует предсказание состояния на шаге n при поступлении наблюдения на этом же шаге
Обозначим $P_{n|k} = cov(x_{n|k}, x_{n|k})$ - ковариация предсказания состояния

Predict:

$$x_{n|n-1} = A_n x_{n-1|n-1},$$

$$P_{n|n-1} = A_n P_{n-1|n-1} A_n^T + \Sigma_w$$

О начальных данных

Начальные данные:

- $x_{0|0}$ - начальное приближение, трактуемое как случайная величина,
- $P_{0|0}$ - ковариация ошибки начального приближения

Фаза Correct

Ковариация наблюдения:

$$S_n = H_n P_{n|n-1} H_n^T + \Sigma_v,$$

Ошибка предсказания:

$$y_n = z_n - H_n x_{n|n-1},$$

Коэффициент Калмана:

$$K_n = P_{n|n-1} H_n^T S_n^{-1}$$

Коррекция:

$$x_{n|n} = x_{n|n-1} + K_n y_n$$

$$P_{n|n} = (I - K_n H_n) P_{n|n-1}$$