Компьютерное зрение '2014
VC Размерность и ее применение

Who? Александр Вахитов

When? April 25, 2014

Анализ конечной выборрки

VC размерность

PCA

О чем мы поговорим

На основе: Y. Abu-Mostafa, Learning From Data (Caltech online)

Было в прошлый раз

Задача обучения:
Необходимо найти наилучшее $h \in H$ из допустимого множества гипотез
Для гипотезы h определим

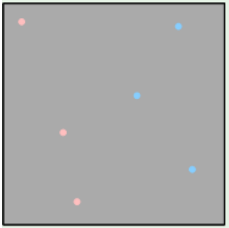
- in sample error (ошибка по выборке) $E_{in}(h) = \nu$
- out of sample error (ошибка по пространству) $E_{out}(h) = \mu$

Неравенство Бернштейна:

$$P(|E_{in}(h) - E_{out}(h)| > \epsilon) \leq 2e^{-2\epsilon^2 N}$$

Анализ конечной выборки: число дихотомий

Задача классификации. Пусть есть выборка $x_1, \dots, x_N$, а также набор бинарных значений $y_1, \dots, y_N$, задающих принадлежность элемента одному из двух классов.



Сколько вариантов $y_1, \dots, y_N$?

Анализ конечной выборки: число дихотомий (2)

Обозначим как $|H(x_1, \ldots, x_N)|$ число дихотомий (т.е. различных наборов $y_1, \ldots, y_N$, которое сможет породить наш набор гипотез H.

Тогда $|H(x_1, \ldots, x_N)| \leq 2^N$.

В то же время само множество гипотез H может быть бесконечно.

Пример: $X =$точки на плоскости, $H =$ приямые на плоскости

Выборка из трех точек x_1, x_2, x_3,

$|H(x_1, x_2, x_3)| = 2^3 = 8$.

Анализ конечной выборки: число дихотомий (2)

Обозначим как $|H(x_1, \ldots, x_N)|$ число дихотомий (т.е. различных наборов $y_1, \ldots, y_N$, которое сможет породить наш набор гипотез H.
Тогда $|H(x_1, \ldots, x_N)| \leq 2^N$.
В то же время само множество гипотез H может быть бесконечно.
Пример: $X =$точки на плоскости, $H =$ приямые на плоскости
Выборка из трех точек x_1, x_2, x_3,
$|H(x_1, x_2, x_3)| = 2^3 = 8$.

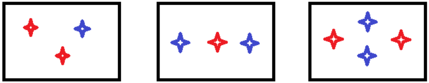
Функция роста $m_H(N)$

Функция роста $m_H(N)$ - для любых N точек $x_1, \ldots, x_N$

$$m_H(N) = max_{x_1,\ldots,x_N} |H(x_1, \ldots, x_N)|$$

Пример функции роста $m_H(N)$

Для перцептрона и $x_i \in \mathbb{R}^2$



$$m_H(3) = 8 = 2^3 \quad m_H(4) = 14 < 2^4$$

Не считаем множества меры 0

Примеры

- Гипотезы: лучи на множестве точек: прямая $m_H(N) = ?$
- Гипотезы: интервалы на множестве точек: прямая $m_H(N) = ?$
- Гипотезы: выпуклые множества на множестве точек: плоскость $m_H(N) = ?$

Точка разрыва

Если для какого-то $k \in \mathbb{N}$ $m_H(k) < 2^k$ то k называется *точкой разрыва*

Пример: $k = 4$ для перцептрона на плоскости

- Гипотезы: лучи на множестве точек: прямая; точка разрыва?
- Гипотезы: интервалы на множестве точек: прямая; точка разрыва?
- Гипотезы: выпуклые множества на множестве точек: плоскость; точка разрыва?

Точка разрыва

Вывод: наличие (конечной) точки разрыва означает наличие полиномиального ограничения на функцию роста $m_H(N)$

Задача

Известно, что точка разрыва 2. Сколько дихотомий может быть для трех элементов в выборке?

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$
○	○	○
○	○	●
○	●	○
●	○	○

Докажем

Полиномиальное ограничение для функции роста (конечная точка разрыва)
Использование $m_H(N)$ вместо M в неравенстве Хефдинга

Полиномиальное ограничение для функции роста

Выпишем все реализуемые дихотомии в таблицу

		# of rows	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\dots$	$\mathbf{x}_{N-1}$	$\mathbf{x}_N$
			$+1$	$+1$	$\dots$	$+1$	$+1$
			-1	$+1$	$\dots$	$+1$	-1
S_1		α	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$+1$	-1	$\dots$	-1	-1
			-1	$+1$	$\dots$	-1	$+1$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	$+1$
			-1	-1	$\dots$	$+1$	$+1$
	S_2^+	β	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	$+1$
S_2			-1	-1	$\dots$	-1	$+1$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	-1
			-1	-1	$\dots$	$+1$	-1
	S_2^-	β	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	-1
			-1	-1	$\dots$	-1	-1

Разделим на 2 ситуации: S_1 : для x_N есть 1 вариант (+1 либо -1) либо S_2: 2 варианта (+1 и -1)

Полиномиальное ограничение для функции роста

		# of rows	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\dots$	$\mathbf{x}_{N-1}$	$\mathbf{x}_N$
			$+1$	$+1$	$\dots$	$+1$	$+1$
			-1	$+1$	$\dots$	$+1$	-1
	S_1	α	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$+1$	-1	$\dots$	-1	-1
			-1	$+1$	$\dots$	-1	$+1$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	$+1$
			-1	-1	$\dots$	$+1$	$+1$
	S_2^+	β	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	$+1$
S_2			-1	-1	$\dots$	-1	$+1$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	-1
			-1	-1	$\dots$	$+1$	-1
	S_2^-	β	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$+1$	-1	$\dots$	$+1$	-1
			-1	-1	$\dots$	-1	-1

$B(N,k)$ максимальное число дихотомий для выборки размера N при наличии точки разрыва k

$B(N,k) = \alpha + 2\beta$

$\alpha + \beta \le B(N-1,k)$

$\beta \le B(N-1,k-1)$

$B(N,k) \le B(N-1,k) + B(N-1,k-1)$

Ограничение для $B(N, k)$

Теорема

$$B(N,k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} C_N^i$$

Доказательство: индукция

индукционный шаг:

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_N^i = \sum_{i=0}^{k-1} C_{N-1}^i + \sum_{i=0}^{k-2} C_N^i$$

Итого: для функции роста

Полиномиальное ограничение

$$m_H(N) \leq \sum_{i=0}^{k-1} C_N^i$$

Примеры оценок:

- Гипотезы: лучи на множестве точек: прямая; $m_H(N) = N + 1 \leq N + 1$
- Гипотезы: интервалы на множестве точек: прямая; $m_H(N) = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} + 1 \leq \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} + 1$
- Гипотезы: перцептроны на множестве точек: плоскость; $m_H(N) =? \leq \frac{N^3}{6} + \frac{5N}{6} + 1$

Итого: для функции роста

Покажем, что можно использовать $m_H(N)$ вместо M
Ключевые соображения: представить $E_{in} - E_{out}$ с помощью случайной выборки других N значений, т.е. выразить $E_{in} - E_{out}$ с помощью $E_{in} - E_{in2}$

Неравенство Вапника - Червоненкиса (VC)

$$P(|E_{in}(g) - E_{out}(g)| > \epsilon) \leq 4m_H(2N)e^{-\frac{1}{8}\epsilon^2 N}$$

Размерность VC

d_{VC} = наибольшее N, для которого $m_H(N) = 2^N$
($d_{VC} = k - 1$ для k - точка разрыва)

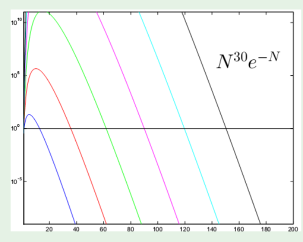
- Гипотезы: лучи на множестве точек: прямая; $d_{VC} = 1$
- Гипотезы: перцептроны на множестве точек: плоскость; $d_{VC} = 3$
- Гипотезы: выпуклые множества на множестве точек: плоскость; $d_{VC} = \infty$

Следствие неравенства Вапника - Червоненкиса (VC)

Неравенство VC:

$$P(|E_{in}(g) - E_{out}(g)| > \epsilon) \leq 4m_H(2N)e^{-\frac{1}{8}\epsilon^2 N}$$

Зависимость N от d: рассмотрим $N^d e^{-N}$



Зависимость $N^d e^{-N}$ для $d = 5, 10, 15, 20, 25, 30$

Применения неравенства Вапника - Червоненкиса (VC)

Неравенство VC:

$$P(|E_{in}(g) - E_{out}(g)| > \epsilon) \leq \delta$$

$$\delta = 4m_H(2N)e^{-\frac{1}{8}\epsilon^2 N} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{\frac{8}{N} ln \frac{4m_H(2N)}{\delta}}$$

С вероятностью $1 - \delta$, $|E_{out} - E_{in}| \leq \Omega(N, H, \delta)$

PCA (Principal Component Analysis)

PCA-Метод главных компонент
Есть набор векторов $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^q$
Задача: построить базис из $s << q$ элементов $b_1, \dots, b_s$, в котором можно представить x_i с минимальной ошибкой
Обозначим как $\hat{x}_i$ проекцию x_i на подпространство, заданное этим базисом

$$\sum_{i=1}^{N} \|x_i - \hat{x}_i\| \to \min$$

Применение в машинном обучении

Классификация:
Из каждого класса выбирается по одному представителю $x_{c1}, \ldots$ и затем образец x относится к классу C по критерию минимума расстояния в пространстве пониженной размерности

$$\rho(x, i) = \|\hat{x} - \hat{x}_{ci}\| \quad C = argmin_i \rho(x, i).$$

Какое значение d_{vc} ?

PCA: детали алгоритма

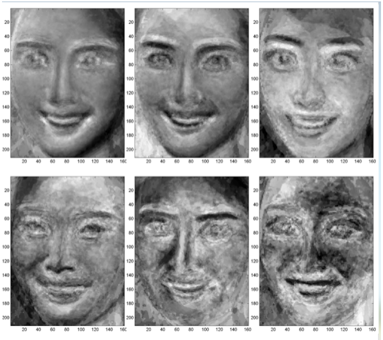
$x_1, \ldots, x_N$

1. центрировать ($\bar{x}_i = x_i - \bar{x}$, $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i$)
2. составить матрицу $X = (x_1\; x_2\; \ldots\; x_N)^T$
3. вычислить $X = USV'$ - $svd-$ разложение
4. результат - первые s столбцов матрицы V.

Пример: распознавание лиц: eigenfaces (Turk, Pentland 1991)

Класс = человек, x_i = изображение лица

Первые 6 "главных векторов" для набора лиц Miss Korea 2013



(http://jbhuang0604.blogspot.ru/2013/04/miss-korea-2013-contestants-face.html)