Компьютерное зрение ’2014. Лекция 3.

Who? Александр Вахитов

When? February 23, 2014

План лекции

Преобразование Фурье

Наводящие соображения

Определение

Свойства

Дискретизация (сэмплинг)

Пояснение задачи

Математическая формулировка

Теорема Найквиста - Котельникова

От модулированного “гребня Дирака” к дискретному сигналу

Задачи

Импульсная характеристика из АЧХ

Вспомним:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Докажем, что

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}]e^{j\omega k}d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)}d\omega = h[k].$$

Преобразование Фурье

Определение

Преобразование Фурье сигнала $x[n]$ - функция $X(e^{j\omega})$ непрерывной переменной ω:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Определение

Обратное преобразование Фурье - формула синтеза сигнала по его п.Ф.:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta},$$

$$\theta = arg(X(e^{j\omega})).$$

Свойства

Теорема о свертке

Преобразование Фурье от свертки $x[n] * h[n]$ есть произведение преобразований Фурье от сворачиваемых сигналов $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

Идея доказательства

$$e^{j\omega n} \to H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Свойства (2)

Свойства

Доказательство

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

Свойства (2)

Свойства

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

Доказательство

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

Свойства

Доказательство

Свойства (2)

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

Свойства (2)

Свойства

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

Доказательство

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

(верно для всех n) $\Longrightarrow$ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$.

Свойства (2)

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

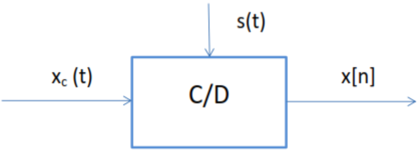
$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

(верно для всех n) $\Longrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$.

Задача дискретизации



Дискретизация с периодом T через модуляцию "гребня Дирака"

- $x_c(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывный сигнал (физический процесс)
- $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ "Гребень Дирака", $s(t) = \sum_n \delta(t - nT)$
- $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ дискретный сигнал

При этом:

$$x[n] = x_c(nT)$$

Математическая формулировка дискретизации

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT).$$

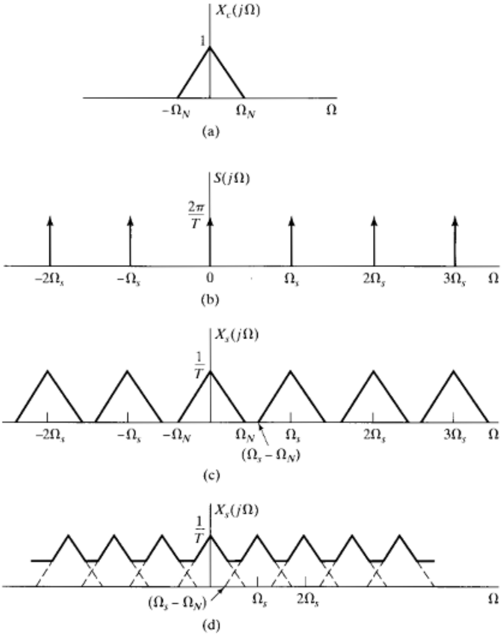
Согласно (Oppenheim, Willsky 1997), $S(j\Omega)$ (непрерывное преобразование Фурье от $s(t)$) равно

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s),$$

для $\Omega_s = 2\pi/T$ (частота дискретизации).

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

Наложение спектров (Oppenheim et al. 1998)



Теорема Найквиста-Котельникова

Если у входного сигнала $x_c(t)$ нет частот выше Ω_N, т.е. $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| > \omega_N$, то восстановление $x_c(t)$ по $x_s(t)$ возможно с использованием идеального фильтра нижних частот с частотой среза Ω_c, удовлетворяющей неравенству

$$\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N),$$

где $\Omega_s = 2\pi/T$.

Переход от модулированного гребня к дискретному сигналу

Для $x_s(t)$ справедливо

$$x_s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Вычислим преобразование Фурье модулированного сигнала $x_s(t)$:

$$X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega nT}.$$

С другой стороны, $x[n] = x_c(nT)$, поэтому

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n},$$

Переход от модулированного гребня к дискретному сигналу (2)

Спектры модулированного и дискретного сигналов совпадают:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}).$$

В итоге,

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

или

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T})).$$

Задачи

Определить преобразование Фурье для

- $$x[n] = \delta[n-3]$$

- $$x[n] = 0.5\delta[n+1] + \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

- $$x[n] = a^n u[n],\ 0 < a < 1$$

Задачи (2)

Пусть есть линейный стационарный фильтр непрерывного сигнала с импульсной характеристикой $h_a(t)$ и дискретный линейный стационарный фильтр с импульсной характеристикой $h_d[n]$.

$$h_a(t) = \begin{cases} ae^{-at}, & t \geq 0, a > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Определить АЧХ аналогового фильтра, сделать набросок его амплитудной характеристики
- Если $h_d[n] = ch_a(nT)$, определить АЧХ дискретного фильтра и такое значение c, что для $\omega = 0$ фильтр усиливает сигнал с коэффициентом 1. Сделать набросок амплитудной характеристики $H_d(e^{j\omega})$.