Компьютерное зрение '2014. Лекция 2.

Who? Александр Вахитов

When? February 23, 2014

План лекции

Причинность

Устойчивость

Свойства ЛСС

Причинность

Определение

Причинная система T : для всякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\forall n \leq n_0 \; x_1[n] = x_2[n] \implies y_1[n] = y_2[n].$$

Пример

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

Причинность

Определение

Причинная система T : для всякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\forall n \leq n_0 \; x_1[n] = x_2[n] \implies y_1[n] = y_2[n].$$

Пример

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

(не причинная)

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Причинность

Определение

Причинная система T : для всякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\forall n \leq n_0 \; x_1[n] = x_2[n] \implies y_1[n] = y_2[n].$$

Пример

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

(не причинная)

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Причинность

Определение

Причинная система T : для всякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\forall n \le n_0 \; x_1[n] = x_2[n] \implies y_1[n] = y_2[n].$$

Пример

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

(не причинная)

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

(причинная).

Причинность

Определение

Причинная система T : для всякого $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\forall n \leq n_0 \; x_1[n] = x_2[n] \implies y_1[n] = y_2[n].$$

Пример

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

(не причинная)

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

(причинная).

Устойчивость

Определение

Система T устойчива, если из ограниченности входного сигнала следует ограниченность выходного:

$$\forall x: \ \exists B_x \forall n \ |x[n]| \leq B_x < \infty \implies$$

$$\exists B_y < \infty \ : \forall n \ |y[n]| \leq B_y < \infty.$$

Пример

Система-компрессор:

$$y[n] = x[Mn], \ -\infty < n < \infty, M \in \mathbb{N}.$$

Устойчивость

Определение

Система T устойчива, если из ограниченности входного сигнала следует ограниченность выходного:

$$\forall x : \ \exists B_x \forall n \, |x[n]| \leq B_x < \infty \implies$$

$$\exists B_y < \infty \ : \forall n \, |y[n]| \leq B_y < \infty.$$

Пример

Система-компрессор:

$$y[n] = x[Mn], \ -\infty < n < \infty, M \in \mathbb{N}.$$

(устойчива)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n+1, & n \geq 0. \end{cases}$$

Устойчивость

Определение

Система T устойчива, если из ограниченности входного сигнала следует ограниченность выходного:

$$\forall x : \ \exists B_x \forall n \ |x[n]| \leq B_x < \infty \implies$$

$$\exists B_y < \infty \ : \forall n \ |y[n]| \leq B_y < \infty.$$

Пример

Система-компрессор:

$$y[n] = x[Mn], \ -\infty < n < \infty, M \in \mathbb{N}.$$

(устойчива)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n+1, & n \geq 0. \end{cases}$$

Устойчивость

Определение

Система T устойчива, если из ограниченности входного сигнала следует ограниченность выходного:

$$\forall x: \ \exists B_x \forall n \ |x[n]| \le B_x < \infty \implies$$

$$\exists B_y < \infty \ : \forall n \ |y[n]| \le B_y < \infty.$$

Пример

Система-компрессор:

$$y[n] = x[Mn], \ -\infty < n < \infty, M \in \mathbb{N}.$$

(устойчива)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n+1, & n \ge 0. \end{cases}$$

(не устойчива)

Устойчивость

Определение

Система T устойчива, если из ограниченности входного сигнала следует ограниченность выходного:

$$\forall x: \ \exists B_x \forall n \ |x[n]| \leq B_x < \infty \implies$$

$$\exists B_y < \infty \ : \forall n \ |y[n]| \leq B_y < \infty.$$

Пример

Система-компрессор:

$$y[n] = x[Mn], \ -\infty < n < \infty, M \in \mathbb{N}.$$

(устойчива)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n+1, & n \geq 0. \end{cases}$$

(не устойчива)

Свойства ЛСС

Линейная стационарная система (ЛСС):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

1. ЛСС устойчива $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$.
2. ЛСС причинная $\Leftrightarrow h[n] = 0$ for $n < 0$.

Система, заданная разностными уравнениями

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m].$$

Выход можно декомпозировать как:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n],$$

где y_h удовлетворяет:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_h[n-k] = 0.$$

(однородное уравнение)

Амплитудно-частотная характеристика

Подадим на вход системы гармонический сигнал $e^{j\omega n}$. Получим:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}).$$

Определение

Амплитудно-частотная характеристика:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}.$$

Отсюда:

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Свойства АЧХ

1

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}),\ r \in \mathbb{Z}.$$

2

$$|H(e^{j\omega})| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \implies |H(e^{j\omega})| < \infty.$$

АЧХ для синусоидального сигнала на входе

$$x[n] = Acos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

Пусть

$$x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n},\ x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

Тогда

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n].$$

Обозначим $y_1[n] = T(x_1[n])$, $y_2[n] = T(x_2[n])$. Тогда,

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n].$$

АЧХ для синусоидального сигнала на входе (продолжение)

По определению, если

$$x_0[n] = e^{j\omega n},$$

на выходе будет

$$y_0[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n}.$$

Для $x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ на выходе получим

$$y_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}H(e^{j\omega_0 n})e^{j\omega_0 n}.$$

аналогично, для $x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$

$$y_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}H(e^{-j\omega_0 n})e^{-j\omega_0 n}.$$

АЧХ для синусоидального сигнала на входе (продолжение)

$$
\begin{aligned}
y[n] =& \frac{A}{2} e^{j\phi} H(e^{j\omega_0 n}) e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} H(e^{-j\omega_0 n}) e^{-j\omega_0 n} \\
=& A|H(e^{j\omega_0 n})|\left(\frac{e^{j(\phi+\theta)} e^{j\omega_0 n} + e^{-j(\phi+\theta)} e^{-j\omega_0 n}}{2}\right) \\
=& A|H(e^{j\omega_0})| cos(\omega_0 n + \phi + \theta).
\end{aligned}
$$

Вывод

При подаче на вход синусоидального сигнала, на выходе получим синусоидальный сигнал, сдвинутый по фазе и домноженный на коэффициент.

Пример АЧХ

Система

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная, } 0 < a < 1.$$

$$h[n] =$$

Система

Пример АЧХ

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная}, \; 0 < a < 1.$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

Система

АЧХ

Пример АЧХ

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная}, \; 0 < a < 1.$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

$$H(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1}{1 + a^2 - 2acos\omega}.$$

Пример АЧХ

Система

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная, } 0 < a < 1.$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

АЧХ

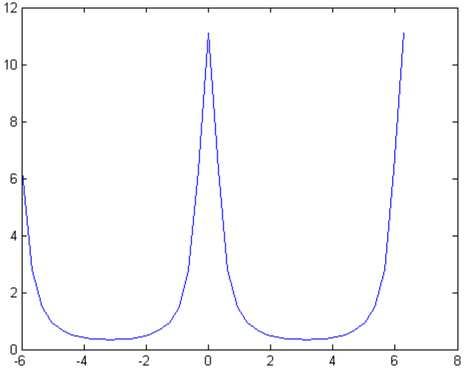
$$H(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1}{1 + a^2 - 2acos\omega}.$$

Пример АЧХ: график амплитуды АЧХ

$|H(e^{j\omega})|^2$:



абсцисса - $\omega \in (-2\pi, 2\pi)$.

Пример АЧХ: Частота

$$arg(z) = atan(\frac{Imz}{Rez}).$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$arg(H(e^{j\omega})) = atan(\frac{a\ \sin(\omega)}{1 - a\ \cos(\omega)})$$

Резюме

Амплитудно-частотная характеристика $H(e^{j\omega})$ -

1 функция непрерывного аргумента ω

2 периодическая функция по ω $(e^{j(\omega+2\pi k)n} = e^{j\omega})$

Задачи

Показать, что система устойчива:

1. $h[n] = \delta[n+2]$
2. $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$
3. $h[n] = 2^n u[-n]$

Является ли система причинной / устойчивой:

1. $y[n] = g[n]x[n]$, $g[n]$ ограничена
2. $y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$
3. $y[n] = x[n - n_0]$

Задачи (2)

Пусть причинная система задана уравнением:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

1. Определить импульсную характеристику
2. Определить выход системы при входе $e^{j\omega n}$
3. определить АЧХ системы
4. определить выход для входа $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$