Проектирование (ортография, перспектива)

Who? Александр Вахитов

When? October 3, 2015

План лекции

Вспоминаем: однородные координаты

Однородные координаты вектора евклидова пространства (размерности 2,3)

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Назовем однородными координатами вектора $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{x_h}$, построенный по правилу:

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Евклидово преобразование является линейным в однородных координатах:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \mapsto \quad \mathbf{x}'_\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x_h}$$

Однородные координаты как фактор-множество

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{q+1}$. Рассмотрим эквивалентность:

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \quad \leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 : \quad \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}.$$

Доказать, что это эквивалентность.
Рассмотрим фактор-множество $\mathbb{R}^{q+1} / \sim$ для $q = 2, 3$.

Что есть фактор-множество

Фактормножество — множество всех классов эквивалентности заданного множества X по заданному отношению $\sim$, обозначается $X/\sim$. Примеры?

$\mathbb{R}^{q+1}/\sim$ и однородные координаты

Задано отображение, строящее однородные координаты:

$$O(\cdot) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q+1}, \quad O(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Построим

$$O_h(\cdot) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q+1}/\sim, \quad \bar{O}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обратимо ли O? O_h ?

$\mathbb{R}^{q+1}/\sim$ и однородные координаты (2)

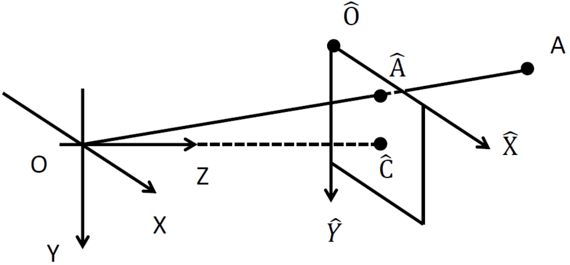
Очевидно наличие разбиения:

$$\mathbb{R}^{q+1}/\!\sim\, = \mathbf{H}_0 \cup \mathbf{H}_1,$$

$$\mathbf{H}_0 = \{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \mathbf{H}_1 = \{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Докажите: $O_h|\mathbf{H}_1$ (сужение O_h на $\mathbf{H}_1$)- биекция .

Проектирование в однородных координатах



Пусть $C_x = C_y = 0$, $f = 1$. Тогда:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/Z \\ Y/Z \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\mathbf{x}}_h =_h \begin{pmatrix} X/Z \\ Y/Z \\ 1 \end{pmatrix} =_h \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Проектирование в однородных координатах (2)

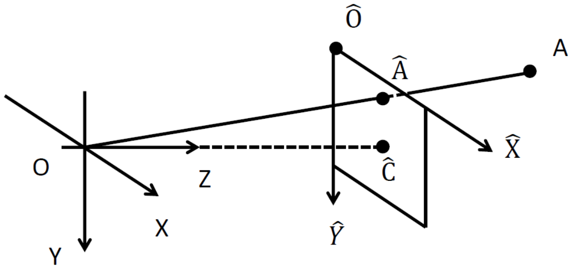
$$\hat{\mathbf{x}}_h =_h \begin{pmatrix} X/Z \\ Y/Z \\ 1 \end{pmatrix} =_h \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_h = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_h.$$

Проектирование в однородных координатах (3)

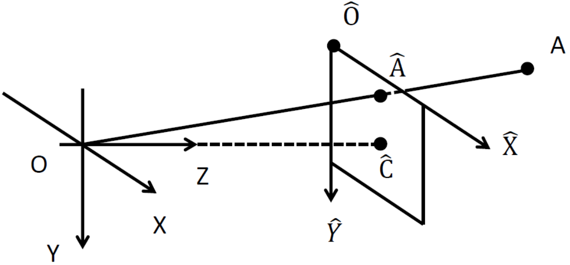


Вспомним о C_x, C_y, f.

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} fX/Z + C_x \\ fY/Z + C_y \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \begin{pmatrix} f & 0 & C_x & 0 \\ 0 & f & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_h.$$

Проектирование в однородных координатах (4)



$$\begin{pmatrix} f & 0 & C_x & 0 \\ 0 & f & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} =_h$$

$$=_h \begin{pmatrix} fX + C_x Z \\ fY + C_y Z \\ Z \end{pmatrix} =_h \begin{pmatrix} fX/Z + C_x \\ fY/Z + C_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перспективное проектирование в однородных координатах

Матрица внутренней калибровки камеры

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} f & \alpha & C_x \\ 0 & f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметры:

- f - фокусное расстояние
- (C_x, C_y) - координаты центра
- α - наклон пикселей (skew)

называются внутренними калибровочными параметрами перспективной камеры.

$$\hat{\mathbf{x}}_h =_h [\mathsf{K} \quad \mathbf{0}_{3\times 1}]\mathbf{x}_h.$$

Перспективное проектирование из глобальной системы координат

Обычно, система координат мира отличается от системы координат камеры.

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R},\ \mathbf{t}].$$

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \mathbf{P}\mathbf{x}_h.$$

Параметры:

- $\mathbf{R}$ - матрица поворота
- $\mathbf{t}$ - вектор переноса

называются внешними калибровочными параметрами перспективной камеры.

Ортографическая камера

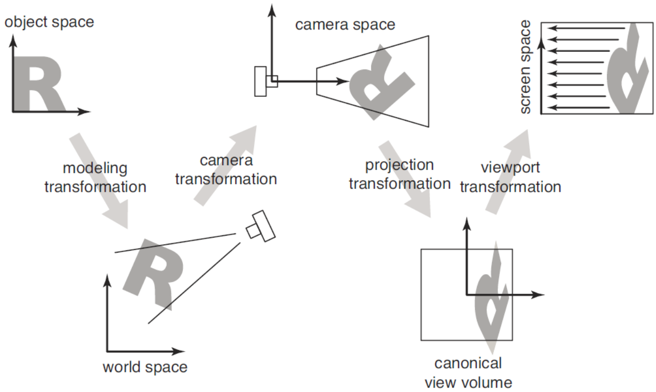
Ортографическая камера задается плоскостью и масштабом s. Она осуществляет параллельное проектирование сцены перпендикулярно плоскости и масштабирует результат.
В случае ортографической камеры,

$$\begin{cases} \hat{X} = X \\ \hat{Y} = Y \end{cases}.$$

Можно записать в однородных координатах:

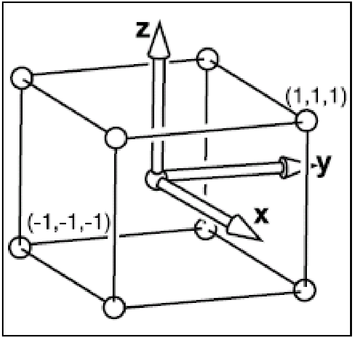
$$\hat{\mathbf{x}}_h = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & C_x \\ 0 & s & 0 & C_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_h.$$

Общая схема проектирования



Поскольку необходима информация о глубине точки, будем проектировать не прямо на экран, а сперва в канонический куб, а потом на экран.

Viewport-трансформация



Канонический куб:

Viewport - трансформация из канонического куба (куба с ребром 2, центрированного в начале координат и выравненного по осям) в экранные координаты.

Viewport-трансформация

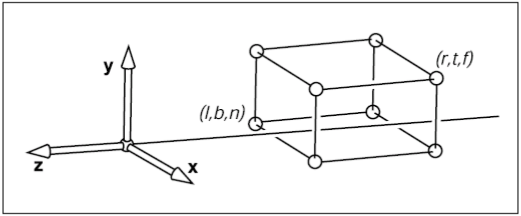
Viewport - трансформация - преобразование координат из канонического куба (куба с ребром 2, центрированного в начале координат и выравненного по осям) в экранные координаты.

$$\mathbf{M}_{vp} = \begin{pmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x-1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$[-1;1]^3 \to [-0,5; n_x-0,5;] \times [-0,5; n_y-0,5] \times [-1;1].$

Ортографическая проекция

$$[l; r] \times [b; t] \times [f; n] \to [-1, 1]^3$$



- b - bottom, t - top
- n - near, f - far
- r - right, l - left

Ортографическая проекция (2)

Проекция из выравненного по осям параллелепипеда в канонический куб.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{orth}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

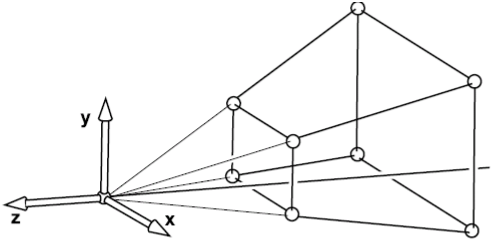
Проектирование ортографической камерой

$$\begin{pmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{canonical} \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{M_{vp}M_{orth}}) \begin{pmatrix} x_{camera} \\ y_{camera} \\ z_{camera} \\ 1 \end{pmatrix}$$

На входе точка в системе координат камеры. Получаем экранные координаты (x_{pixel}, y_{pixel}) и глубину в каноническом кубе $z_{canonical}$ (для дальнейшего определения перекрытий).

Перспективная камера

Уже имеем преобразование из выравненного по осям параллелепипеда в экран. Построим преобразование в параллелепипед!
Исходный объем - усеченная пирамида.



Перспективная камера

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ (n+f)z - fn \\ z \end{pmatrix} =_h \begin{pmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ n+f-\frac{fn}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание на случаи $z = n$, $z = f$.

В итоге, отображение 'объем $\rightarrow$ канонический куб ' обозначим $\mathbf{M_{persp}}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M_{vp}}\mathbf{M_{orth}}\mathbf{P} = \mathbf{M_{vp}}\mathbf{M_{persp}}.$$

Проектирование из координат мира

Отрисовываемые объекты обычно заданы в мировой системе координат, следовательно перед проектированием необходимо сделать евклидово преобразование в систему координат камеры:

$$M = M_{\mathbf{vp}} M_{\mathbf{projection}} M_{\mathbf{world-to-cam}},$$

где $M_{\mathbf{world-to-cam}}$ евклидово преобразование, а $M_{\mathbf{projection}}$ либо $M_{\mathbf{orth}}$, либо $M_{\mathbf{persp}}$.