Трехмерные преобразования, зрительные иллюзии

Who? Александр Вахитов

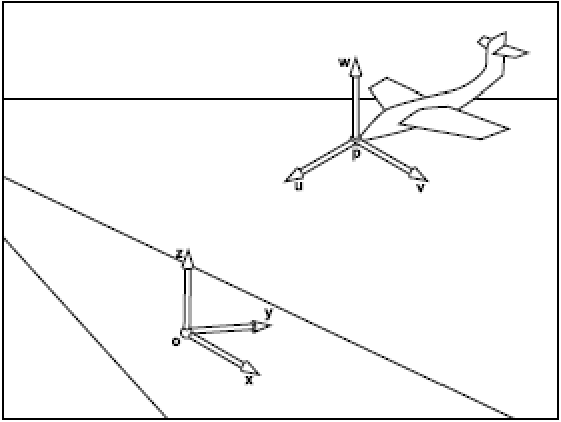
When? September 25, 2015

План лекции

Трехмерные преобразования

Оптические иллюзии

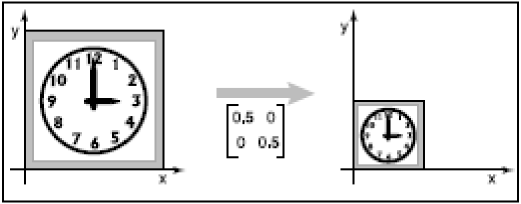
Базис трехмерного пространства



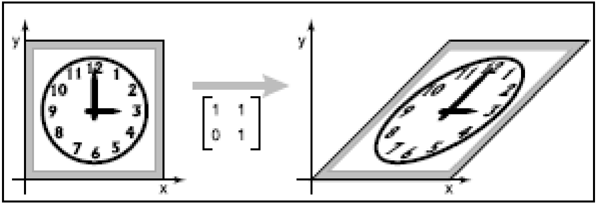
Линейные преобразования в плоскости

- масштаб
- наклон
- поворот
- отражение

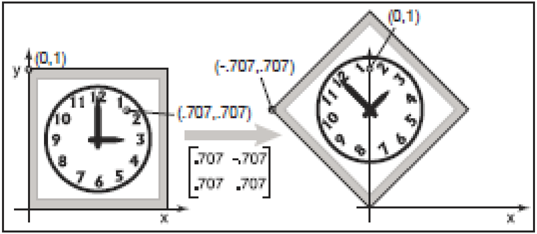
Масштабирование



Наклон

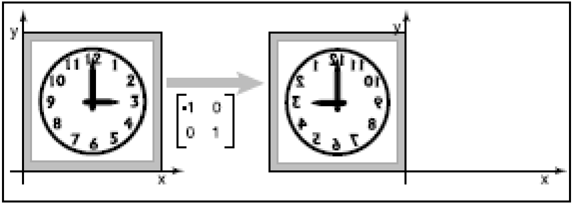


Поворот

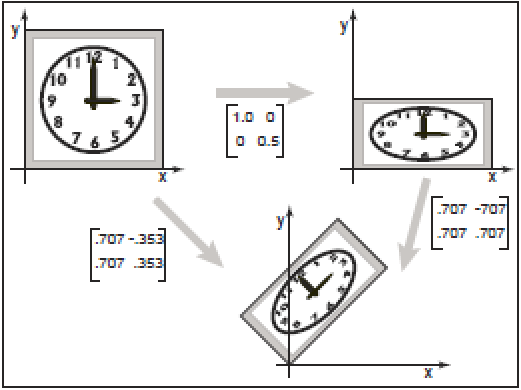


Повороты образуют некоторое пространство. Какова его размерность?

Отражение



Композиция



Ортогональные матрицы

Пусть есть матрица R размера 3×3. Ее столбцы обозначим $\mathbf{r_i}$:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}],$$

$$\mathbf{r_i}^T \mathbf{r_j} = \delta_{ij}.$$

Свойство:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

Для матриц поворота:

$$det\mathbf{R} = 1$$

Сингулярное разложение

- Любая прямоугольная матрица представима как произведение ортогональной, диагональной и ортогональной

$$\forall A: \; A = USV^T,$$

U, V - ортогональные матрицы, S - диагональная матрица масштабирования

- $$\forall A = A^T: \; A = RSR^T$$

R - ортогональная, S - диагональная

Линейные преобразования в 3D

- масштаб (3 оси)
- наклон (3 оси)
- поворот (3 угла)
- отражение (3 оси)

Аффинные преобразования

Линейное (рассмотрено выше):

$$x' = Ax$$

Перенос:

$$x' = x + t$$

Евклидово преобразование пространства $\mathbb{R}^3$ (Euclidean transformation)

Преобразование, состоящее из поворота с матрицей $\mathbf{R}$ и переноса на вектор $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

Это преобразование сохраняет расстояния (то есть, является изометрией). Все ли изометрии трехмерного пространства - евклидовы преобразования?

Переход к однородным координатам

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Можем записать:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, аффинное преобразование может быть представлено в линейном виде. Для построения обратного преобразования достаточно обратить матрицу $\mathbf{T}$ размера 4×4:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} =?$$

Обратное евклидово преобразование

$$\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{R}^T\mathbf{t} = \mathbf{R}^T\mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{x}' - \mathbf{R}^T\mathbf{t}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^\mathbf{T} & -\mathbf{R}^\mathbf{T}\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты

По-прежнему $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Назовем однородными координатами вектора $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{x_h}$, построенный по правилу:

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Прямая:

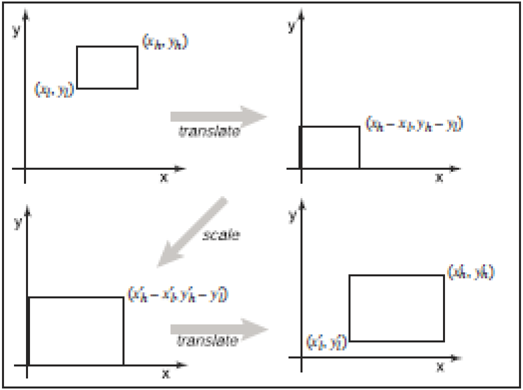
$$\{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \lambda \in \mathbb{R}\} \mapsto \{\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Следовательно, $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует направлению x.

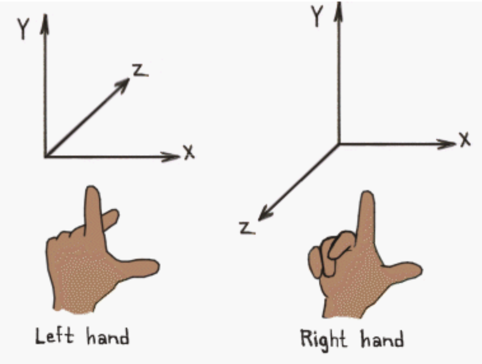
Оконное преобразование

Аффинное двухмерное



Напишите формулу в однородных координатах
Дома: преобразовать изображение с помощью cv::warpAffine, а также с помощью cv::remap

Базис евклидова пространства



Левая и правая тройка векторов

Построение базиса

Задача: есть три вектора, не лежащих в одной плоскости $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Необходимо построить базис, так, чтобы первым был $\mathbf{u}$, первые два вектора базиса были базисом плоскости $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
Ключ: векторное произведение

Векторное произведение

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ называется вектор $\mathbf{c}$, такой что $\mathbf{c}^T\mathbf{a} = \mathbf{c}^T\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют правильно ориентированную тройку, и $\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, что записывается как $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Построение базиса

Задача: есть три вектора, не лежащих в одной плоскости $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Необходимо построить базис, так, чтобы первым был $\mathbf{u}$, первые два вектора базиса были базисом плоскости $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

- $\mathbf{i} = \mathbf{u}$
- $\mathbf{k} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

Ответ: $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Построение базиса

Задача: есть три вектора, не лежащих в одной плоскости $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Необходимо построить базис, так, чтобы первым был $\mathbf{u}$, первые два вектора базиса были базисом плоскости $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

- $\mathbf{i} = \mathbf{u}$
- $\mathbf{k} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

Ответ: $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Прямая через точки

Прямая задается уравнением

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x} + c = 0.$$

В однородных координатах,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = \mathbf{l_h}^T x_h.$$

Таким образом, $\mathbf{l_h}$ ортогонально однородным координатам точки.
Как построить однородные координаты прямой по координатам точек с помощью векторного произведения?
налогично можем пересечь две прямые.

Прямая через точки

Прямая задается уравнением

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x} + c = 0.$$

В однородных координатах,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = \mathbf{l_h}^T x_h.$$

Таким образом, $\mathbf{l_h}$ ортогонально однородным координатам точки.

$$\mathbf{l_h} = \mathbf{x_{1,h}} \times \mathbf{x_{2,h}}.$$

налогично можем пересечь две прямые.

Прямая через точки

Прямая задается уравнением

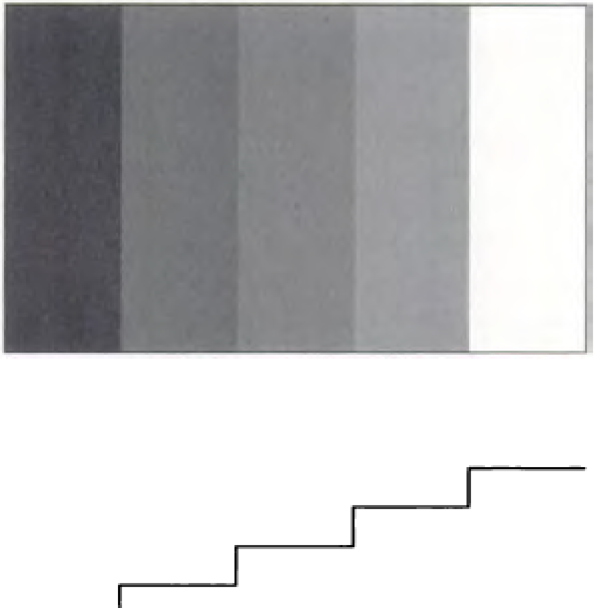
$$\mathbf{l}^T\mathbf{x} + c = 0.$$

В однородных координатах,

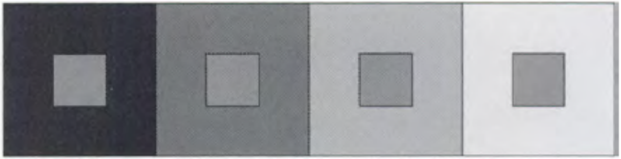
$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = \mathbf{l_h}^T x_h.$$

Таким образом, $\mathbf{l_h}$ ортогонально однородным координатам точки.
Аналогично можем пересечь две прямые.

Полосы Маха

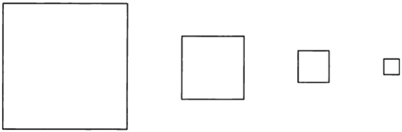


Полосы Маха

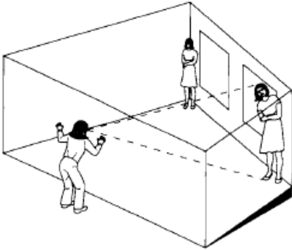


внутренние квадратики одинакового цвета

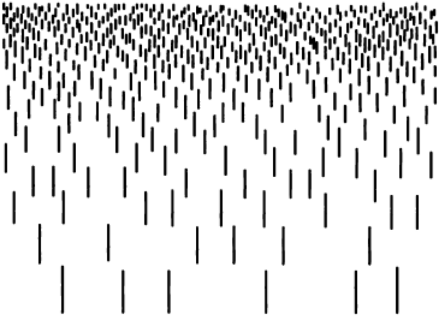
Положение из размера



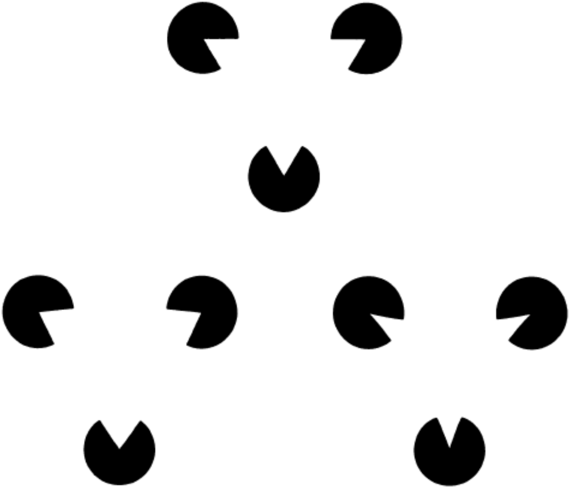
Комната



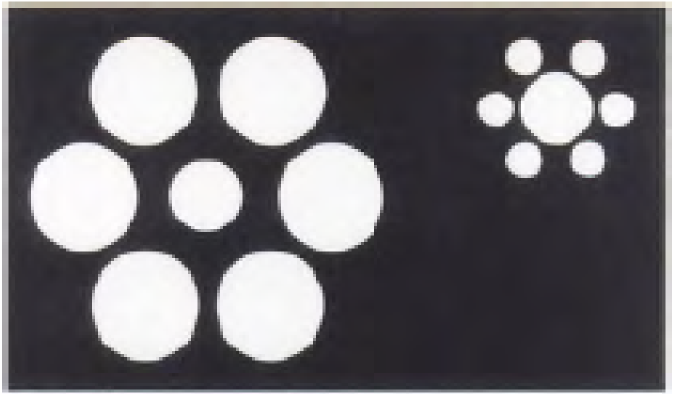
Лес



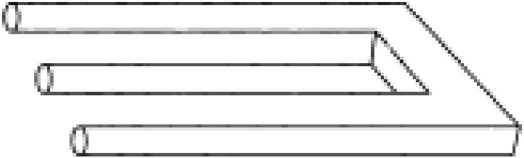
Субъективные контуры



Относительность размера



Иллюзии геометрии



(a)